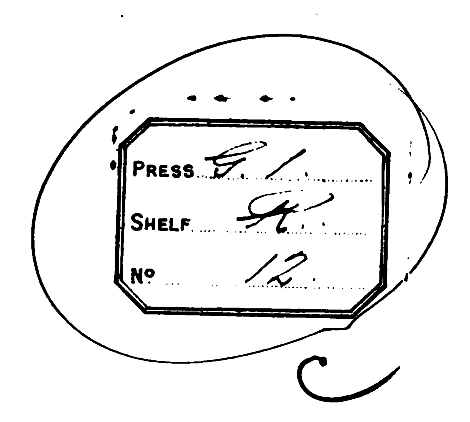
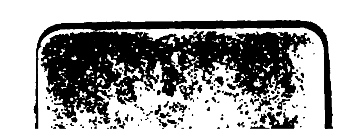


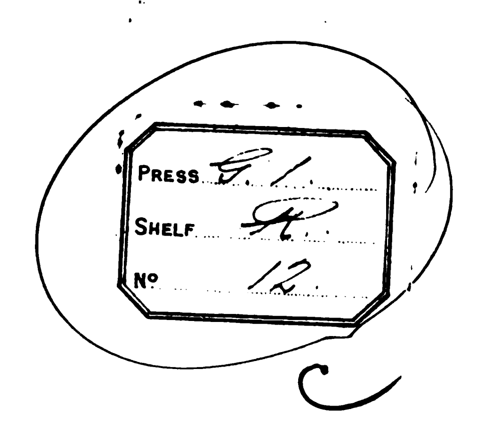




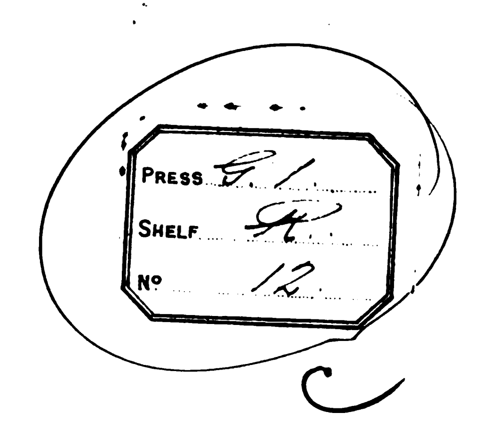

PRESS G. 1.
SHELF 4.
No 12.




600044441N


PRESS G. 1.
SHELF 4.
No 12.




PRESS G. 1
SHELF 4
Nº 12

BEITRÄGE

ZUR

THEORIE DER KUGELFUNCTIONEN.

…EITE ABTHEILUNG.

VON

…EUMANN,

…ER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1878.

Erste Abtheilung.

Darstellung der Kugelfunctionen erster und zweiter Art mittelst unendlicher Reihen und bestimmter Integrale.

Ich definire die Kugelfunctionen als zwei particulare Integrale der Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+n(n+1)\,Y=0,$$

worin n eine ganze Zahl bedeutet. Und zwar bezeichne ich als Kugelfunction *erster Art:* $P_n(x)$ dasjenige particulare Integral, welches für $x=1$ endlich bleibt und für $x=\infty$ unendlich gross wird; andrerseits als Kugelfunction *zweiter Art:* $Q_n(x)$ dasjenige, welches für $x=1$ unendlich gross wird und für $x=\infty$ verschwindet.

Die so definirten Functionen sind noch mit einem von x unabhängigen Factor behaftet. Diese Factoren bestimme ich auf folgende Weise.

In der Function $P_n(x)$ soll der constante Factor einen solchen Werth haben, dass dieselbe für $x=1$ ebenfalls $=1$ wird. Dies führt zu dem Ausdruck:

$$(2.)\qquad P_n(x)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left(x^n-\frac{n(n-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right).$$

In der Kugelfunction zweiter Art: $Q_n(x)$ soll der constante Factor einen solchen Werth haben, dass

$$(3.)\qquad Q_n(x)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(z)\partial z}{x-z}$$

wird. Für dieses begrenzte Integral habe ich (Crelle's Journal, Band 37) folgenden geschlossenen Ausdruck gefunden:

$$(4.)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{P_n(z)\partial z}{x-z}=R_n(x)-P_n(x)\log\frac{x-1}{x+1},$$

worin $R_n(x)$ eine ganze rationale Function von x von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vorstellt, die von solcher Beschaffenheit ist, dass

$$R_n(x) - P_n(x) \log \frac{x-1}{x+1}$$

für $x = \infty$ verschwindet. Diese Function $R_n(x)$ genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial R_n(x)}{\partial x}\right) + n(n+1)R_n(x) = 4\frac{\partial P_n(x)}{\partial x}, \tag{5.}$$

mittelst welcher sich $R_n(x)$ leicht durch Kugelfunctionen erster Art darstellen lässt; so dass man erhält:

$$Q_n(x) = -2\left(\frac{2n-1}{n}P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x) + \cdots\right) - P_n(x)\log\frac{x-1}{x+1}. \tag{6.}$$

Die *abgeleiteten Kugelfunctionen erster Art* und die *abgeleiteten Kugelfunctionen zweiter Art* definire ich als zwei particulare Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + n(n+1)Y - \frac{j^2}{1-x^2}Y = 0, \tag{7.}$$

worin n und j ganze Zahlen bezeichnen. Und zwar definire ich die *abgeleiteten Kugelfunctionen zweiter Art:* $Q_{nj}(x)$ als diejenigen particularen Integrale, welche für $x = \pm 1$ unendlich gross werden, und für $x = \infty$ verschwinden. Die hiebei noch unbestimmt bleibenden constanten Factoren dieser Integrale bestimme ich dahin, dass

$$Q_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} Q_n^{(j)}(x), \tag{8.}$$

d. i.

$$Q_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}$$

wird*).

Was die *abgeleiteten Kugelfunctionen erster Art* betrifft, so werden dieselben unendlich für $x = \infty$, und zerfallen in zwei Classen, je nachdem $j < n$ oder $j > n$ ist. Diejenigen der *ersten Classe:* $j \leq n$ bezeichne ich mit $P_{nj}(x)$ und definire sie, was die in ihnen enthaltenen constanten Factoren betrifft, durch:

*) Der Bequemlichkeit willen sollen nämlich häufig die Differentialquotienten von P_n und Q_n mit P_n', P_n'', $\cdots$ $P_n^{(j)}$, $\cdots$ und Q_n', Q_n'', $\cdots$ $Q_n^{(j)}$, $\cdots$ bezeichnet werden.

$$P_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} P_n^{(j)}(x), \tag{9.}$$

d. i. durch:

$$P_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}.$$

Diejenigen *der zweiten Classe:* $j > n$ zerfallen von Neuem in zwei Abtheilungen, nämlich in die $S_{nj}(x)$, welche für $x = -1$ verschwinden und für $x = +1$ unendlich werden, und in die $T_{nj}(x)$, welche umgekehrt für $x = +1$ verschwinden und für $x = -1$ unendlich werden. Was endlich die in $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ enthaltenen constanten Factoren betrifft, so bestimme ich dieselben in solcher Weise, dass

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x) \tag{10.}$$

wird.

Bevor ich meine Untersuchungen *in extenso* mittheile, werde ich zuvörderst eine Uebersicht zu geben suchen über den hauptsächlichen Inhalt derselben.

§ 1 enthält zwei Sätze über die Gleichwerthigkeit particularer Integrale von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

§ 2. In dem Ausdruck

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \left(a_0 (x-1)^n + a_1 (x-1)^{n-1} + \cdots\right) \tag{11.}$$

werden, wenn derselbe in die Differentialgleichung (7.) substituirt wird, die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots$ durch recurrente Relationen *ersten Grades* bestimmt. Dessen ungeachtet bleiben *zwei* von diesen Coefficienten *willkührlich.* Der Ausdruck zerfällt also in *zwei* particulare Integrale, welche ich mit

$$Y_1 \quad \text{und} \quad Z_1 \tag{12.}$$

bezeichne. Das Integral Z_1 wird als gleichwerthig mit $Q_{nj}(x)$ nachgewiesen und mit diesem identisch gemacht.

§ 3. Mit jedem Ausdruck, welcher der Differentialgleichung (7.) genügt, lassen sich *sieben* Umformungen vornehmen, ohne dass derselbe aufhört ein Integral der Differentialgleichung zu sein. Die so entstehenden *acht* Integrale können theils gleichwerthig, theils verschieden sein. Anwendung auf den Ausdruck

$$P_{nj}(x) = \alpha\left(x^{n-j} - \frac{(n-j)(n-j-1)}{2(2n-1)} x^{n-j-2} + \cdots\right). \tag{13.}$$

Die Vertauschung von n mit $-(n+1)$ macht denselben gleichwerthig mit $Q_{nj}(x)$. Bestimmung desjenigen Factors β, durch welchen

$$\beta P_{-(n+1),j}(x) = Q_{nj}(x) \tag{14.}$$

wird. Die Vertauschung von j mit $-j$ in dem Ausdruck (13.) giebt gleichfalls ein mit $Q_{nj}(x)$ gleichwerthiges Integral, welches für $j > n$ die Form eines geschlossenen algebraischen Ausdrucks annimmt.

§ 4. Das particulare Integral Z_1 (12.) und die aus Z_1 durch Umformung resultirenden Integrale Z_2, Z_3, Z_4 sind sämmtlich gleichwerthig mit $Q_{nj}(x)$. Die constanten Factoren C_1, C_2, C_3, C_4 dieser Integrale Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 werden so bestimmt, dass

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Q_{nj}(x) \tag{15.}$$

wird. Die in solcher Weise für $Q_{nj}(x)$ sich ergebenden vier Ausdrücke Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sind Reihen, die nach fallenden Potenzen von $(x-1)$, respective $(x+1)$ fortschreiten. Diese Reihen convergiren nur für $x^2 > 1$. Sie gelten auch für $j = 0$. Für $j > n$ verwandeln sie sich in geschlossene Ausdrücke.

Die Zahlenwerthe von $Q_n^{(j)}(0)$ für $j > n$. Dieselben sind *rein imaginär*, falls $(j-n)$ eine *gerade* Zahl, und *reell*, wenn $(j-n)$ eine *ungerade* Zahl ist. Die Zahlenwerthe von $Q_{nj}(\pm 1)$ und $Q_{nj}(\infty)$. Der Werth von $Q_{nj}(-x)$.

§ 5. Aus dem particularen Integral Y_1 (12.) werden durch Umformung drei andere

$$Y_2,\ Y_3,\ Y_4 \tag{16.}$$

abgeleitet. Alle vier Integrale sind geschlossene algebraische Ausdrücke. Das Integral Y_1 ist *immer* gleichwerthig mit Y_4, ebenso Y_2 mit Y_3. Hingegen sind Y_1 und Y_2 von einander verschieden, falls $j > n$, und nur dann gleichwerthig, wenn $j \leqq n$ ist. In letzterem Falle können alle vier Integrale Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 durch schickliche Bestimmung der in ihnen enthaltenen constanten Factoren identisch mit $P_{nj}(x)$ gemacht werden. Die in solcher Weise entstehende Formel

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = P_{nj}(x), \quad (j < n) \tag{17.}$$

giebt für $P_{nj}(x)$ vier Ausdrücke; diese Ausdrücke sind Reihen, welche nach den Potenzen von $(x-1)$ respective $(x+1)$ fortschreiten, und welche leicht auch direct mittelst des *Taylor*'schen Satzes abgeleitet werden können.

§ 6. Wenn $j > n$, so sind durch Y_1, Y_4 und Y_2, Y_3 zwei *verschiedene* particulare Integrale der Differentialgleichung (7.) dargestellt, welche mit

$$S_{nj}(x) = Y_1 = Y_4 \quad \text{und} \quad T_{nj}(x) = Y_2 = Y_3, \qquad (j > n) \tag{18.}$$

bezeichnet werden. Die willkührlichen Factoren der Y, nämlich A_1, A_4 und A_2, A_3, werden so bestimmt, dass

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x), \qquad (j > n) \tag{19.}$$

wird.

Es wird nachgewiesen, dass $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ respective gleichwerthig sind mit

$$(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{+1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}} \quad \text{und} \quad (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{-1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n). \tag{20.}$$

§ 7. Die beiden begrenzten Integrale (20.) sind particulare Integrale der Differentialgleichung (7.). Solches wird *direct* nachgewiesen, unabhängig von den früheren Betrachtungen.

§ 8. Es wird gezeigt, dass

$$\begin{aligned} S_{nj}(x) &= (-1)^j (1\cdot 2\cdot 3 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n) \\ T_{nj}(x) &= (-1)^j (1\cdot 2\cdot 3 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{-1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n) \end{aligned} \tag{21.}$$

ist. Ferner wird die Relation bewiesen:

$$T_{nj}(x) = (-1)^{j-n} S_{nj}(-x); \qquad (j > n) \tag{22.}$$

woraus mit Rücksicht auf (19.) folgt:

$$\begin{aligned} Q_{nj}(x) &= + S_{nj}(x) - (-1)^{j-n} S_{nj}(-x), \qquad (j > n) \\ Q_{nj}(x) &= - T_{nj}(x) + (-1)^{j-n} T_{nj}(-x). \qquad (j > n) \end{aligned} \tag{23.}$$

§ 9. Analytische Ausdrücke der Integrale:

$$\int_\infty^{1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}} \quad \text{und} \quad \int_\infty^{-1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}. \tag{24.}$$

Beiläufige Bemerkungen über die *Zahlenwerthe,* welche diese Ausdrücke (24.) und einige verwandte Ausdrücke für $x = \pm 1$ annehmen.

§ 10. Einführung der Integrale *zweiter Gattung:*

$$\int_x^{1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\partial z \quad \text{und} \quad \int_x^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\partial z. \tag{25.}$$

Zwischen diesen Integralen *zweiter Gattung* und den in (24.) aufgeführten Integralen *erster Gattung* finden die Relationen statt:

$$(26.)\quad \begin{aligned} \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} &= \frac{A}{(x^2-1)^j} \int_{x}^{-1} (x-z)^{j-1}\, P_n(z)\,\partial z\,, \\ \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} &= \frac{B}{(x^2-1)^j} \int_{x}^{1} (x-z)^{j-1}\, P_n(z)\,\partial z\,, \end{aligned} \qquad (j > n \text{ und } j > 0)$$

wo A, B constant, d. i. unabhängig von x sind. Hierdurch gewinnen die Formeln (21.) die Gestalt:

$$(27.)\quad \begin{aligned} S_{nj}(x) &= (-1)^{n+1}\, C \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{x}^{-1} (x-z)^{j-1}\, P_n(z)\,\partial z\,, \\ T_{nj}(x) &= (-1)^{n+1}\, C \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{x}^{1} (x-z)^{j-1}\, P_n(z)\,\partial z\,, \end{aligned} \qquad (j > n \text{ und } j > 0)$$

wo C die Constante bezeichnet:

$$(28.)\quad C = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}\,.$$

Aus (27.) folgt mit Rückblick auf (19.) sofort:

$$(29.)\quad Q_{nj}(x) = (-1)^n\, C \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{-1}^{+1} (x-z)^{j-1}\, P_n(z)\,\partial z\,, \qquad (j > n \text{ und } j > 0)$$

wo C wiederum die Constante (28.) bezeichnet.

§ 11. Es wird gezeigt, dass die Formel (29.) *nicht* gebunden ist an die Voraussetzungen $j > n$ und $j > 0$, sondern allgemein gilt für jeden beliebigen Werth von j. Für den speciellen Fall $j = 0$ nimmt jene Formel die Gestalt an:

$$(30.)\quad Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{x-z}\,.$$

§ 12. Es wird gezeigt, dass der Ausdruck:

$$Y = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{\pm 1} (x-z)^{j-1} P_n(z) \partial z \tag{31.}$$

für *alle* Werthe von j und n der Differentialgleichung (7.) Genüge leistet, ausser im Falle $j = 0$.

§ 13. Die Functionen $P_{nj}(x)$ lassen sich ausdrücken durch die begrenzten Integrale *zweiter Gattung*, und zwar vermittelst der Formeln:

$$P_{nj}(x) = D\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{\pm 1} (x-z)^{j-1} P_n(z) \partial z, \qquad (j < n) \tag{32.}$$

wo D die Constante bezeichnet:

$$D = (-1)^{j+1} \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}. \tag{33.}$$

§ 14 und 14ª. Ableitung einiger Hülfsformeln, behufs der weiter anzustellenden Untersuchungen.

§ 15, 15ª und 15ᵇ. Entwicklung der Functionen $S_{nj}(x)$, $T_{nj}(x)$, $Q_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, jedoch nur unter der *Voraussetzung*, dass $j > n$ ist.

§ 16, 16ª und 16ᵇ. Entwicklung der Functionen $Q_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x für den Fall, dass $j \leq n$ ist.

§ 17. Einführung der Reihen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{nj}(x) &= 1 + \frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^4 + \cdots \\ \mathfrak{S}_{nj}(x) &= x + \frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^5 + \cdots \end{aligned} \tag{34.}$$

Es wird gezeigt, dass sämmtliche Functionen $P_{nj}(x)$, $Q_{nj}(x)$ und $S_{nj}(x)$, $T_{nj}(x)$ vermittelst dieser Reihen sich in einfacher Weise ausdrücken lassen.

§ 1.

Zwei Hülfssätze über die particularen Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wenn man zur Bestimmung eines particularen Integrals einer Differentialgleichung sich einer Reihe mit unbestimmten Coefficienten bedient, die nach dem veränderlichen Parameter einer Function $\varphi(x, p)$ fortschreitet, so ist der Werth des so bestimmten Integrals im Allgemeinen von der Function $\varphi(x, p)$ abhängig. So geben z. B. die drei Reihen

$$Y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \left\{ A_0 (x-1)^{p_0} + A_1 (x-1)^{p_1} + \ldots \right\},$$

$$Y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{j}{2}} \left\{ B_0 (x+1)^{q_0} + B_1 (x+1)^{q_1} + \ldots \right\},$$

$$Y = (1-x^2)^{-\frac{j}{2}} \left\{ C_0 x^{r_0} + C_1 x^{r_1} + \ldots \right\},$$

wenn sie in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \left(n(n+1) - \frac{j^2}{1-x^2}\right) Y = 0$$

eingeführt, und die Coefficienten A, B, C nebst den Parametern p, q, r der Gleichung entsprechend bestimmt werden, drei *verschiedene* particulare Integrale derselben. Dagegen giebt eine vierte Reihe von der Form:

$$Y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \left\{ D_0 (x+1)^{s_0} + D_1 (x+1)^{s_1} + \ldots \right\}$$

ein particulares Integral, welches mit demjenigen, das aus der ersten der obigen Reihen entspringt, *gleichwerthig* ist, d. h. sich von jenem nur durch einen von x unabhängigen Factor unterscheidet.

Gleichwerthig nenne ich zwei particulare Integrale einer gegebenen Differentialgleichung, wenn das eine durch eine schickliche Wahl eines von x unabhängigen Factors mit dem andern identisch gemacht werden kann, *verschieden*, wenn solches nicht möglich ist.

Zur Beurtheilung der Gleichwerthigkeit particularer Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man sich folgender zwei Sätze bedienen:

I. Satz. *Alle particularen Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche für das specielle Argument $x = x_1$ verschwinden, sind gleichwerthig, wenn jene Gleichung ein Integral besitzt, welches für $x = x_1$ nicht verschwindet.*

Beweis. — Sind X, Y, Z drei particulare Integrale der gegebenen Gleichung, so findet die Relation statt:

$$X = \alpha Y + \beta Z,$$

wo α, β Constante bezeichnen. Wenn nun die Integrale X und Y für $x = x_1$ verschwinden, das Integral Z aber nicht, so kann diese Relation nur bestehen, wenn $\beta = 0$ ist. Es muss also $X = \alpha Y$ sein. Q. e. d.

II. Satz. *Alle particularen Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche für das specielle Argument $x = x_1$ nicht unendlich werden, sind gleichwerthig, falls jene Gleichung ein Integral besitzt, welches für $x = x_1$ unendlich gross wird.*

Beweis. — Sind X, Y, Z drei particulare Integrale jener Gleichung, so findet die Relation statt:

$$X = \alpha Y + \beta Z,$$

wo α, β Constante sind. Wenn nun X und Y für $x = x_1$ endliche Werthe haben, Z aber unendlich wird, so kann diese Relation nur bestehen, wenn $\beta = 0$ ist. Also muss $X = \alpha Y$ sein. Q. e. d.

§ 2.

Die Differentialgleichung der abgeleiteten Kugelfunctionen. Ihre vollständige Integration vermittelst zweier Ausdrücke Y_1 und Z_1.

Es soll das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \left(n(n+1) - \frac{j^2}{1-x^2}\right) Y = 0, \tag{1.}$$

in welcher n und j positive ganze Zahlen sind, in der Form

$$Y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} X \tag{1.a}$$

entwickelt werden.

Die alsdann für X resultirende Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial X}{\partial x}\right) + 2j\frac{\partial X}{\partial x} + n(n+1)X = 0 \tag{2.}$$

lässt sich integriren durch die Reihe:

$$X = \alpha_0(x-1)^n + \alpha_1(x-1)^{n-1} + \alpha_2(x-1)^{n-2} + \cdots, \tag{3.}$$

in welcher die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ den Relationen entsprechen müssen:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2n\,\alpha_1 &= 2 \cdot n(n-j)\,\alpha_0\,, \\
2(2n-1)\,\alpha_2 &= 2(n-1)(n-j-1)\,\alpha_1\,, \\
3(2n-2)\,\alpha_3 &= 2(n-2)(n-j-2)\,\alpha_2\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p(2n-p+1)\,\alpha_p &= 2(n-p+1)(n-j-p+1)\,\alpha_{p-1}\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Vermittelst dieser Relationen bestimmen sich $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ durch α_0; sodann ergiebt sich aus denselben weiter, dass $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots \alpha_{2n}$ den Werth *Null* haben, während α_{2n+1} *willkührlich* bleibt, und dass endlich die weiter folgenden Coefficienten $\alpha_{2n+2}, \alpha_{2n+3}, \cdots \alpha_\infty$ durch jenes willkührliche α_{2n+1} ausdrückbar sind. In der That ergeben sich für α_n und die folgenden Coefficienten die Relationen:

$$\begin{aligned}
n(n+1)\,\alpha_n &= 2 \cdot 1 \cdot (1-j)\,\alpha_{n-1}\,, \\
(n+1)n\,\alpha_{n+1} &= 0\,, \\
(n+2)(n-1)\,\alpha_{n+2} &= 2 \cdot 1 \cdot (1+j)\,\alpha_{n+1}\,, \\
(n+3)(n-2)\,\alpha_{n+3} &= 2 \cdot 2 \cdot (2+j)\,\alpha_{n+2}\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n+q)(n-q+1)\,\alpha_{n+q} &= 2(q-1)(q-1+j)\,\alpha_{n+q-1}\,.
\end{aligned}$$

Setzt man aber hierin $q = n+1$, so bleibt $\alpha_{n+q} = \alpha_{2n+1}$ *willkührlich*, weil jede Seite der für α_{n+q} resultirenden Gleichung für sich verschwindet, die linke Seite, weil $n - q + 1 = 0$, die rechte Seite, weil nach den vorhergehenden Gleichungen $\alpha_{n+q-1} = 0$ ist. — Was endlich die auf α_{2n+1} folgenden Coefficienten betrifft, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
1\,(2n+2)\,\alpha_{2n+2} &= -\,2\,(n+1)(n+1+j)\,\alpha_{2n+1}\,, \\
2\,(2n+3)\,\alpha_{2n+3} &= -\,2\,(n+2)(n+2+j)\,\alpha_{2n+2}\,, \\
3\,(2n+4)\,\alpha_{2n+4} &= -\,2\,(n+3)(n+3+j)\,\alpha_{2n+3}\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die Reihe (3.) giebt also für X *zwei* particulare Integrale mit den Willkührlichen α_0 und α_{2n+1}, welche kurzweg mit A_1 und C_1 bezeichnet sein mögen, während jene Integrale selber Y_1 und Z_1 heissen mögen. Also:

$$(4.)\quad Y_1 = A_1 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \Big\{ (x-1)^n + 2\,\frac{n(n-j)}{1 \cdot 2n}\,(x-1)^{n-1} + 2^2\,\frac{n(n-1)(n-j)(n-j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 2n(2n-1)}\,(x-1)^{n-2} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + 2^n\,\frac{(n-j)(n-j-1)\cdots(1-j)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)} \Big\}\,,$$

$$(5.)\quad Z_1 = C_1 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \Big\{ (x-1)^{-n-1} - 2\frac{(n+1)(n+j+1)}{1(2n+2)}(x-1)^{-n-2} + 2^2 \frac{(n+1)(n+2)(n+j+1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot (2n+2)(2n+3)}(x-1)^{-n-3}$$
$$- 2^3 \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+j+1)(n+j+2)(n+j+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (2n+2)(2n+3)(2n+4)}(x-1)^{-n-4} + \cdots \Big\}.$$

Der Ausdruck Z_1 verschwindet für $x = \infty$, und muss daher [nach Satz I, § 1] gleichwerthig sein mit der abgeleiteten Kugelfunction $Q_{nj}(x)$. Denn die Differentialgleichung (1.) besitzt noch ein anderes Integral, welches für $x = \infty$ *nicht* verschwindet, nämlich den Ausdruck Y_1.

Ich werde den Factor C_1 so bestimmen, dass Z_1 mit $Q_{nj}(x)$ *identisch* wird. Alsdann muss z. B.

$$(x^{n+1} Z_1)_{x=\infty} = (x^{n+1} Q_{nj}(x))_{x=\infty}$$

werden; woraus mit Rücksicht auf (5.) sich ergiebt:

$$(6.)\quad C_1 = (x^{n+1} Q_{nj}(x))_{x=\infty}.$$

Der Ausdruck rechter Hand kann leicht berechnet werden auf Grund der in der Einleitung gegebenen Definition [vgl. (3.), (8.) auf Seite 1 und 2]:

$$Q_{nj}(x) = (-1)^j (1\cdot 2\cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}}.$$

Dabei kann der Ausdruck unter dem Integralzeichen (weil es sich hier um unendlich grosse Werthe von x handelt) nach Potenzen von $\frac{z}{x}$ entwickelt werden. In dieser Entwicklung:

$$\frac{1}{(x-z)^{j+1}} = \frac{1}{x^{j+1}} \sum \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+p)}{1\cdot 2\cdots p}\left(\frac{z}{x}\right)^p$$

fallen alle Glieder fort, deren $p < n$ ist (weil $\int_{-1}^{+1} z^p P_n(z)dz = 0$, so lange $p < n$), während andererseits alle Glieder, deren $p > n$, gegen dasjenige Glied, dessen $p = n$ ist, verschwinden werden, sobald man $x = \infty$ setzt. Berücksichtigt man ausserdem, dass für die hier in Betracht kommenden unendlich grossen Werthe von x die Potenz $(1-x^2)^{\frac{j}{2}}$ in $(-1)^{\frac{j}{2}} \cdot x^j$ übergeht, so folgt aus (6.):

$$C_1 = (-1)^{\frac{j}{2}} (-1)^j \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (j+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \int_{-1}^{+1} z^n P_n(z)dz,$$

oder, weil das hier auftretende Integral $= 2\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n+1)}$ ist:

$$(6.^a)\quad C_1 = (-1)^{\frac{j}{2}} (-1)^j \cdot 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots (j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n+1)}.$$

Somit folgt aus (5.):

$$(7.)\quad Q_{nj}(x) = (-1)^{\frac{j}{2}}(-1)^j \cdot 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$

$$\times\left\{(x-1)^{-n-1} - 2\frac{(n+1)(n+j+1)}{1\cdot(2n+2)}(x-1)^{-n-2} + 2^2\frac{(n+1)(n+2)(n+j+1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+2)(2n+3)}(x-1)^{-n-3} - \cdots\right\}.$$

Das particulare Integral Y_1 (4.), welches für $x = -1$ verschwindet und für $x = \infty$ unendlich gross wird, ist dadurch als gleichwerthig mit der abgeleiteten Kugelfunction $P_{nj}(x)$ charakterisirt. Die nähere Discussion von Y_1 findet zweckmässiger erst statt nach den Umformungen dieser Function, die im folgenden § ausgeführt werden sollen.

§ 3.

Für jedes particulare Integral der genannten Differentialgleichung lassen sich sieben Umformungen angeben.

Die Differentialgleichung (1.) bleibt ungeändert, wenn man x mit $-x$ vertauscht, ebenso auch, wenn man j mit $-j$ vertauscht. Leistet daher irgend ein Ausdruck $Y = f(x,j)$ jener Gleichung Genüge, so wird Gleiches gelten vom Ausdruck $f(-x,j)$, ebenso vom Ausdruck $f(x,-j)$, u. s. w. In solcher Weise ergiebt sich, dass mit jedem Ausdruck, der jener Gleichung genügt, im Ganzen *sieben Umformungen* vorgenommen werden dürfen, ohne dass derselbe aufhört, der Gleichung zu genügen. Diese Umformungen werden hervorgebracht

(I.) durch Vertauschung von x mit $-x$,

(II.) durch Vertauschung von j mit $-j$,

(III.) durch gleichzeitige Vertauschung von x mit $-x$ und j mit $-j$,

(IV.) durch Vertauschung von n mit $-n-1$,

(V.), (VI.), (VII.) dadurch, dass man die Operationen (I.), (II.), (III.) gleichzeitig mit der Operation (IV.) bewerkstelligt.

Ist der ursprüngliche Ausdruck durch eine *Reihe* dargestellt, so beziehen sich diese Umformungen auf das allgemeine Glied der Reihe; und dabei kann es geschehen, dass die Reihe aus einer begrenzten in eine unbegrenzte oder umgekehrt sich verwandelt.

Wendet man diese Umformungen auf den gewöhnlichen Ausdruck für $P_{nj}(x)$ an, nämlich auf:

$$(8.)\quad P_{nj}(x) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\, n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times \left\{ x^{n-j} - \frac{(n-j)(n-j-1)}{2(2n-1)} x^{n-j-2} + \frac{(n-j)(n-j-1)(n-j-2)(n-j-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-j-4} - + \cdots\cdots \right\},$$

so bleibt der Charakter dieses particularen Integrals durch die Operationen (I.), (II.), (III.) ungeändert, indem es nicht aufhört, gleichwerthig zu sein mit einer abgeleiteten Kugelfunction *erster* Art. Dagegen entsteht durch die Operation (IV.) ein Ausdruck, welcher gleichwerthig ist mit einer abgeleiteten Kugelfunction *zweiter* Art (wie solches leicht ersichtlich durch Anwendung des Satzes I. in § 1). Der Factor, mit welchem dieser Ausdruck zu multipliciren ist, um ihn mit der Kugelfunction zweiter Art, d. i. mit $Q_{nj}(x)$ *identisch* zu machen, kann leicht bestimmt werden, falls man die früher [vergl. (6.), (6.ª)] gefundene Formel

$$(9.)\qquad \left(x^{n+1}\, Q_{nj}(x)\right)_{x=\infty} = (-1)^{\frac{j}{2}} (-1)^j \cdot 2\, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

beachtet. Man findet in solcher Weise:

$$(10.)\quad Q_{nj}(x) = (-1)^j \cdot 2\, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\, (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times \left\{ x^{-j-n-1} + \frac{(j+n+1)(j+n+2)}{2(2n+3)} x^{-j-n-3} + \frac{(j+n+1)(j+n+2)(j+n+3)(j+n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} x^{-j-n-5} + \cdots \right\};$$

dies ist der bekannte Ausdruck der Kugelfunction $Q_{nj}(x)$.

Mit diesem Ausdruck können nun die Operationen (I.), (II.), (III.) vorgenommen werden. Aber nur die Vertauschung von j mit $-j$ giebt ihm eine neue Form, jedoch ohne seine Gleichwerthigkeit mit $Q_{nj}(x)$ aufzuheben. Bestimmt man den Factor des durch Vertauschung von j mit $-j$ entstandenen Ausdrucks so, dass der Gleichung (9.) genügt wird, so erhält man:

$$(11.)\quad Q_{nj}(x) = 2\, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times \left\{ x^{j-n-1} + \frac{(j-n-1)(j-n-2)}{2(2n+3)} x^{j-n-3} + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j-n-3)(j-n-4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} x^{j-n-5} + \cdots \right\}.$$

Für $j=0$ werden beide Ausdrücke (10.) und (11.) von derselben Form, und geben:

$$(12.)\quad Q_n(x) = 2\, \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \left\{ x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \cdots \right\}.$$

Für $j>n$ gewinnt der Ausdruck (11.) eine *geschlossene* Gestalt. So z. B. erhält man:

$$
(13.)\quad
\begin{aligned}
Q_{n,n+1}(x) &= 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{n+1}{2}},\\
Q_{n,n+2}(x) &= 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\cdot x,\\
Q_{n,n+3}(x) &= 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{n+3}{2}}\left(x^2+\frac{2\cdot 1}{2(2n+3)}\right),\\
Q_{n,n+4}(x) &= 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+4)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{n+4}{2}}\left(x^3+\frac{3\cdot 2}{2(2n+3)}x\right).
\end{aligned}
$$

Giebt man dem für $j > n$ resultirenden *geschlossenen* Ausdruck (11.), was die Aufeinanderfolge seiner einzelnen Glieder betrifft, die entgegengesetzte Anordnung, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $j-n$ gerade oder ungerade ist. Man erhält

für $j > n$ und $j-n =$ gerade:

$$
(14.)\quad Q_{nj}(x) = 2\left(2\cdot 4\cdots(j+n)\right)\left(1\cdot 3\cdot 5\cdots(j-n-1)\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}}\times
$$
$$
\times\left\{x+\frac{(j-n-2)(j+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{(j-n-4)(j-n-2)(j+n-1)(j+n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots\right\};
$$

andererseits für $j > n$ und $j-n =$ ungerade:

$$
(15.)\quad Q_{nj}(x) = 2\left(2\cdot 4\cdots(j+n-1)\right)\left(1\cdot 3\cdot 5\cdots(j-n-2)\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}}\times
$$
$$
\times\left\{1+\frac{(j-n-1)(j+n)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(j-n-3)(j-n-1)(j+n)(j+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\cdots\right\}.
$$

§ 4.

Die durch Umformung von Z_1 entstehenden particularen Integrale Z_2, Z_3, Z_4.

Betrachtet man die beiden Integrale Y_1, Z_1 (Seite 10, 11), so zeigt sich, dass jedes derselben aus dem andern durch die Operation (IV.) ableitbar ist.

Bezeichnet man die Ausdrücke, in welche Z_1 durch die Operationen (I.), (II.), (III.) übergeht, resp. mit Z_2, Z_3, Z_4, so werden all' diese Integrale Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 für $x=\infty$ verschwinden, und daher gleichwerthig sein mit $Q_{nj}(x)$. Die vier willkührlichen Factoren C_1, C_2, C_3, C_4 dieser Integrale werde ich so bestimmen, dass die Gleichwerthigkeit zur Identität wird, also bestimmen vermittelst der vier Gleichungen:

$$
\left((x-1)^{n+1}Z_1\right)_{x=\infty}=\left((x+1)^{n+1}Z_2\right)_{x=\infty}=\left((x-1)^{n+1}Z_3\right)_{x=\infty}=\left((x+1)^{n+1}Z_4\right)_{x=\infty}=\left(x^{n+1}Q_{nj}(x)\right)_{x=\infty};
$$

wobei zu beachten, dass der Werth von $\left(x^{n+1}\, Q_{nj}(x)\right)_{x=\infty}$ bereits früher [vergl. (9.)] angegeben wurde. — Man erhält in solcher Weise folgende vier mit $Q_{nj}(x)$ identische Ausdrücke:

$$(1.)\quad Z_1 = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{(x-1)^{-n-1} - 2\,\frac{(n+1)(n+j+1)}{1\cdot(2n+2)}(x-1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)(n+2)(n+j+1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+2)(2n+3)}(x-1)^{-n-3} - \cdots\right\},$$

$$(2.)\quad Z_2 = (-1)^j\, 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{(x+1)^{-n-1} + 2\,\frac{(n+1)(n+j+1)}{1\cdot(2n+2)}(x+1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)(n+2)(n+j+1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+2)(2n+3)}(x+1)^{-n-3} + \cdots\right\},$$

$$(3.)\quad Z_3 = (-1)^j\, 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{(x-1)^{-n-1} - 2\,\frac{(n+1)(n-j+1)}{1\cdot(2n+2)}(x-1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)(n+2)(n-j+1)(n-j+2)}{1\cdot 2(2n+2)(2n+3)}(x-1)^{-n-3} - \cdots\right\},$$

$$(4.)\quad Z_4 = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{(x+1)^{-n-1} + 2\,\frac{(n+1)(n-j+1)}{1\cdot(2n+2)}(x+1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)(n+2)(n-j+1)(n-j+2)}{1\cdot 2(2n+2)(2n+3)}(x+1)^{-n-3} + \cdots\right\},$$

$$(5.)\qquad Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Q_{nj}(x).$$

In diesen Formeln kann j jeden Werth, grösser oder kleiner als n, haben. So z. B. folgt für $j=0$ aus (1.), (3.):

$$(6.)\quad Q_{n0}(x) = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \times$$
$$\times\left\{(x-1)^{-n-1} - 2\,\frac{(n+1)^2}{1\cdot(2n+2)}(x-1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1\cdot 2(2n+2)(2n+3)}(x-1)^{-n-3} - \cdots\right\},$$

und andererseits aus (2.), (4.):

$$(7.)\quad Q_{n0}(x) = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \times$$
$$\times\left\{(x+1)^{-n-1} + 2\,\frac{(n+1)^2}{1\cdot(2n+2)}(x+1)^{-n-2} + 2^2\,\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{1\cdot 2(2n+2)(2n+3)}(x+1)^{-n-3} + \cdots\right\}.$$

Mittelst dieser Ausdrücke für $Q_{n0}(x)$ sind nach der Definition von $Q_{nj}(x)$, d. i. nach der Relation $Q_{nj}(x) = (1-x^2)^{\frac{j}{2}}\,\frac{\partial^j Q_{n0}(x)}{\partial x^j}$, die Vorzeichen in den vorstehenden Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) bestimmt worden, sobald bei der directen Bestimmung von C_1, C_2, C_3, C_4 Zweideutigkeiten eintraten.

Die Reihen (3.), (4.) sind unbegrenzt für $j<n$, gewinnen aber eine geschlossene Gestalt für $j>n$. Giebt man in diesem letzteren Falle den

aufeinanderfolgenden Gliedern jener Reihen die entgegengesetzte Anordnung, so gelangt man zu folgenden Formeln:

(zu beachten die Voraussetzung: $j > n$)

$$(8.)\quad Q_{nj}(x) = Z_3 = \frac{2^j \cdot (1 \cdot 2 \cdots (j-1))}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}j}} \left\{ 1 + \frac{(j-n-1)(j+n)}{1\,(j-1)} \left(\frac{x-1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j+n)(j+n-1)}{1 \cdot 2\,(j-1)(j-2)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(j+n)(j+n-1)\cdots(2n+2)}{(j-1)(j-2)\cdots(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{j-n-1} \right\},$$

$$(9.)\quad Q_{nj}(x) = Z_4 = \frac{(-1)^{j-n-1}\, 2^j (1 \cdot 2 \cdots (j-1))}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}j}} \left\{ 1 - \frac{(j-n-1)(j+n)}{1\,(j-1)} \left(\frac{x+1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j+n)(j+n-1)}{1 \cdot 2\,(j-1)(j-2)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^{j-n-1} \frac{(j+n)(j+n-1)\cdots(2n+2)}{(j-1)(j-2)\cdots(n+1)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{j-n-1} \right\}.$$

Setzt man in (8.) der Reihe nach $j = n+1,\ n+2,\ n+3$, etc., so folgt:

$$(10.)\quad \begin{aligned} Q_{n,\,n+1}(x) &= 2^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}, \\ Q_{n,\,n+2}(x) &= 2^{n+2} \frac{1 \cdot 2 \cdots n\,(n+1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}(n+2)}} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot (2n+2)}{1 \cdot (n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right) \right\}, \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Formeln sind identisch mit den Formeln (13.), Seite 14.

Für $x = 0$ wird offenbar $Q_{nj}(x)$ identisch mit $\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}$. Folglich kann man vermittelst der Gleichungen (8.) und (9.) die Werthe $\left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0}$ berechnen. Und zwar findet man aus (8.):

(immer vorausgesetzt: $j > n$)

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} = 2\left(2 \cdot 4 \cdots (2j-2)\right) \times$$
$$\times \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \frac{(j-n-1)(j+n)}{1 \cdot (j-1)} + \tfrac{1}{4} \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j+n)(j+n-1)}{1 \cdot 2\,(j-1)(j-2)} - \cdots \right\},$$

andererseits aber aus (9.) einen Werth, der von dem eben hingeschriebenen nur durch den Factor $(-1)^{j-n-1}$ sich unterscheidet. Hieraus folgt, dass der in der Parenthese $\{\,\}$ in (11.) enthaltene Ausdruck jedesmal verschwinden muss, wenn $j - n$ *gerade* ist. Also wird:

$$(12.)\quad \left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} = 0, \qquad \text{für } j > n \text{ und } j - n = \text{gerade},$$

wie solches auch direct aus der Formel (14.), Seite 14 sich ergiebt. Gleichzeitig findet man aus der Formel (15.) Seite 14:

$$(13.)\quad \left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} = 2\left(2\cdot 4\cdots(j+n-1)\right)\left(1\cdot 3\cdot 5\cdots(j-n-2)\right), \quad \text{für } j>n \text{ und } j-n= \text{ungerade.}$$

Die rechte Seite dieser letzten Formel repräsentirt also, beiläufig bemerkt, zugleich den Werth der Reihe (11.), falls $j > n$ und $j - n$ ungerade ist.

Für $j \leq n$ lässt sich der Werth von $\left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0}$ vermittelst der Reihen (1.), (2.), (3), (4.) des gegenwärtigen § *nicht* bestimmen, ebensowenig vermittelst der Reihe (11.) des vorigen §. Denn all' diese Reihen sind divergent für $x^2 < 1$. Hiemit hängt zusammen, dass sowohl $Q_{n0}(x)$ als $Q_{nj}(x)$, $j \leq n$ gedacht, für $x^2 < 1$ complexe Werthe haben. In der That ist für $x^2 < 1$:

$$(14.)\quad Q_{n0}(x) = R_n(x) - P_n(x)\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + P_n(x)\log(-1);$$

woraus folgt*):

$$(15.)\quad \left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0}\cdot\log(-1), \quad \text{für } j<n \text{ und } n-j= \text{gerade;}$$

$$(16.)\quad \left(\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^j R_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[P_n(x)\log\frac{1-x}{1+x}\right]\right)_{x=0}, \quad \text{für } j<n \text{ und } n-j= \text{ungerade.}$$

Bemerkung. — Aus den Gleichungen (1.), (2.) ergiebt sich:

$$(17.)\quad Q_{nj}(\pm 1) = \infty, \qquad Q_{nj}(\infty) = 0, \qquad \text{für } j<n;$$

ferner aus den Gleichungen (8.), (9.):

$$(18.)\quad Q_{nj}(\pm 1) = \infty, \qquad Q_{nj}(\infty) = 0, \qquad \text{für } j>n.$$

Auch folgt aus denselben Gleichungen:

$$(19.)\quad Q_{nj}(-x) = (-1)^{j-n-1}\, Q_{nj}(x), \qquad \text{für jedes beliebige } j.$$

§ 5.

Die durch Umformung von Y_1 entstehenden particularen Integrale Y_2, Y_3, Y_4, für $j \leq n$.

Aus dem particularen Integral Y_1 (Seite 10) ergeben sich durch die Operationen (I.), (II.), (III.) drei andere particulare Integrale Y_2, Y_3, Y_4. Diese vier Integrale Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 lauten, falls man ihre constanten Factoren mit A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet, folgendermassen:

---

*) Man vergleiche den Werth von $R_n(x)$, Seite 2.

$$(20.)\quad \begin{aligned}
Y_1 &= A_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x-1)^n + 2\,\frac{n(n-j)}{1\cdot 2n}(x-1)^{n-1} + 2^2\,\frac{n(n-1)(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x-1)^{n-2} + \\
&\qquad \cdots + 2^n\,\frac{n(n-1)\cdots 1\cdot(n-j)(n-j-1)\cdots(1-j)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2n(2n-1)\cdots(n+1)}\Big\},\\
Y_2 &= A_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x+1)^n - 2\,\frac{n(n-j)}{1\cdot 2n}(x+1)^{n-1} + 2^2\,\frac{n(n-1)(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x+1)^{n-2} - \\
&\qquad \cdots + (-2)^n\,\frac{n(n-1)\cdots 1\cdot(n-j)(n-j-1)\cdots(1-j)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2n(2n-1)\cdots(n+1)}\Big\},\\
Y_3 &= A_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x-1)^n + 2\,\frac{n(n+j)}{1\cdot 2n}(x-1)^{n-1} + 2^2\,\frac{n(n-1)(n+j)(n+j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x-1)^{n-2} + \\
&\qquad \cdots + 2^n\,\frac{n(n-1)\cdots 1\cdot(n+j)(n+j-1)\cdots(1+j)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2n(2n-1)\cdots(n+1)}\Big\},\\
Y_4 &= A_4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x+1)^n - 2\,\frac{n(n+j)}{1\cdot 2n}(x+1)^{n-1} + 2^2\,\frac{n(n-1)(n+j)(n+j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x+1)^{n-2} - \\
&\qquad \cdots + (-2)^n\,\frac{n(n-1)\cdots 1\cdot(n+j)(n+j-1)\cdots(1+j)}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2n(2n-1)\cdots(n+1)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind stets geschlossen. Uebrigens erstrecken sich die Ausdrücke für Y_1 und Y_2 bis zu den angegebenen letzten Gliedern nur dann, wenn $j > n$ ist, während sie, falls $j \leqq n$ ist, schon früher abbrechen. Das allgemeine, $(p+1)^{\text{te}}$ Glied in Y_1 oder Y_2 lautet nämlich:

$$(21.)\quad T^{(p)} = (\pm 2)^p\,\frac{[n(n-1)\cdots(n-p+1)]\,[(n-j)(n-j-1)\cdots(n-j-p+1)]}{[1\cdot 2\cdots p][2n(2n-1)\cdots(2n-p+1)]}(x \mp 1)^{n-p},$$

wo das obere Zeichen für Y_1, das untere für Y_2 gilt. Ist daher $j > n$, so wird $T^{(p)}$ verschwinden für $p = n+1$, und das letzte nicht verschwindende Glied durch $T^{(n)}$ dargestellt sein. Ist hingegen $j \leqq n$, so wird $T^{(p)}$ bereits verschwinden für $p = n - j + 1$, mithin das letzte nicht verschwindende Glied durch $T^{(n-j)}$ dargestellt sein; wobei zu bemerken, dass $T^{(n-j)}$ den Werth hat:

$$(22.)\quad \begin{aligned}
T^{(n-j)} &= (\pm 2)^{n-j}\,\frac{[n(n-1)\cdots(j+1)][(n-j)(n-j-1)\cdots 1]}{[1\cdot 2\cdots(n-j)][2n(2n-1)\cdots(n+j+1)]}(x\mp 1)^j,\\
&= (\pm 2)^{n-j}\,\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}(x\mp 1)^j.
\end{aligned}$$

Die Integrale Y_1 und Y_4 verschwinden für $x = -1$. Ebenso verschwinden Y_2 und Y_3 für $x = +1$. Beachtet man dies und beachtet man gleichzeitig, dass die betreffende Differentialgleichung ein Integral $Q_{nj}(x)$ besitzt, welches sowohl für $x = -1$ als auch für $x = +1$ unendlich gross wird, so ergiebt sich aus dem Satze I (Seite 9) sofort, dass Y_1 und Y_4 einander gleichwerthig sind, und desgleichen auch Y_2 und Y_3. Diese Gleichwerthigkeiten verwandeln sich in Identitäten, sobald man $A_1 = A_4$ und

$A_2 = A_3$ macht; denn für ein sehr grosses x verwandeln sich Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 resp. in $A_1 x^n$, $A_2 x^n$, $A_3 x^n$, $A_4 x^n$. — Im Folgenden soll stets $A_1 = A_4$ und $A_2 = A_3$ gesetzt werden.

Durch Y_1 und Y_2 sind zwei *verschiedene* Integrale dargestellt; denn für $x = 1$ wird $Y_1 = \infty$ und $Y_2 = 0$, und umgekehrt für $x = -1$ wird $Y_1 = 0$ und $Y_2 = \infty$. — Dies ist aber nur richtig, solange $j > n$, mithin die in (20.) dargestellte Form dieser Functionen Gültigkeit hat. Ist nämlich $j < n$, und sind also die letzten Glieder von Y_1, Y_2 die in (22.) angegebenen, so sind, wie sogleich erläutert werden soll, Y_1 und Y_2 einander *gleichwerthig;* so dass im Falle $j \overline{\overline{<}} n$ durch die vier Functionen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 im Ganzen nur *ein* particulares Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung dargestellt ist.

Zur Erläuterung der eben gemachten Behauptung sei bemerkt, dass sämmtliche Glieder in der Parenthese des Ausdruckes für Y_1 oder Y_2 im Falle $j \overline{\overline{<}} n$ einen gemeinschaftlichen Factor $(x \mp 1)^j$ besitzen, welcher *vor* die Parenthese gezogen werden kann, wodurch alsdann Y_1 und Y_2 die Gestalt annehmen:

$$(23.)\qquad \begin{aligned} Y_1 &= A_1 (x^2 - 1)^{\frac{j}{2}} X_1 , \\ Y_2 &= A_2 (x^2 - 1)^{\frac{j}{2}} X_2 , \end{aligned}$$

wo X_1 und X_2 ganze rationale Functionen $(n - j)^{\text{ter}}$ Ordnung von $x - 1$, respective $x + 1$ sind. In dem betrachteten Fall $j \overline{\overline{<}} n$ werden also Y_1 und Y_2 für $x = 1$ *verschwinden* oder wenigstens *endliche Werthe haben,* jenachdem j von Null verschieden oder gleich Null ist. Hieraus aber folgt durch Anwendung der Sätze I., II. (Seite 9), dass Y_1 und Y_2 einander *gleichwerthig* sind. Q. e. d.

Die in solcher Weise für den Fall $j \leq n$ bewiesene Gleichwerthigkeit zwischen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 erstreckt sich auch auf $P_{nj}(x)$; wie sich leicht aus dem Satze II. (Seite 9) ergiebt, falls man nur beachtet, dass $P_{nj}(x)$, ebenso wie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, für $x = \pm 1$ *endliche* Werthe hat. Um die genannten Gleichwerthigkeiten in Identitäten:

$$(24.)\qquad P_{nj}(x) = Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4$$

zu verwandeln, bedarf es nur einer geeigneten Wahl der Factoren A_1, A_2, A_3, A_4. Auch bemerkt man, dass die zu wählenden Werthe dieser Factoren einander *gleich* sein werden; weil Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 für ein sehr grosses x respective die Gestalten $A_1 x^n$, $A_2 x^n$, $A_3 x^n$, $A_4 x^n$ annehmen. Aus (24.) folgt:

$$(25.)\qquad \left((x^2-1)^{-\frac{j}{2}}P_{nj}(x)\right)_{x=1} = \left((x^2-1)^{-\frac{j}{2}}Y_1\right)_{x=1}.$$

Die linke Seite dieser Formel reducirt sich auf:

$$(-1)^{\frac{j}{2}}\left(\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}\right)_{x=1}, \text{ und ist daher } = (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{2^j\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots j}.$$

Somit folgt:

$$(26.)\qquad (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{2^j\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots j} = \left((x^2-1)^{-\frac{j}{2}}Y_1\right)_{x=1},$$

also mit Rücksicht auf den für für Y_1 geltenden Ausdruck (20.), namentlich mit Rücksicht auf das in (22.) angegebene letzte Glied dieses Ausdruckes:

$$(27.)\qquad (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{2^j\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots j} = A_1\, 2^{n-j}\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n},$$

oder was dasselbe:

$$(28.)\qquad A_1 = (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{1}{2^n}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j}\frac{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}{(j+1)(j+2)\cdots n}.$$

Somit ergiebt sich für den gemeinschaftlichen Werth von A_1, A_2, A_3, A_4 schliesslich der einfache Ausdruck:

$$(29.)\qquad A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots 2n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

In dem hier betrachteten Falle $j \leqq n$ erhält man also aus (24.) vier verschiedene Gestalten des Integrals $P_{nj}(x)$. Diese vier Gestalten Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sind, wie aus (20.), (22.) und (29.) sich ergiebt, folgende:

vorausgesetzt: $j < n$.

$$(30.)\qquad \begin{aligned}
P_{nj}(x) &= \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots 2n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x-1)^n + 2\frac{n(n-j)}{1\cdot 2n}(x-1)^{n-1}\\
&\quad + 2^2\frac{n(n-1)(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x-1)^{n-2} + \cdots + 2^{n-j}\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}(x-1)^j\Big\},\\
P_{nj}(x) &= \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots 2n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x+1)^n - 2\frac{n(n-j)}{1\cdot 2n}(x+1)^{n-1}\\
&\quad + 2^2\frac{n(n-1)(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x+1)^{n-2} - \cdots + (-2)^{n-j}\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}(x+1)^j\Big\},\\
P_{nj}(x) &= \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots 2n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x-1)^n + 2\frac{n(n+j)}{1\cdot 2n}(x-1)^{n-1}\\
&\quad + 2^2\frac{n(n-1)(n+j)(n+j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x-1)^{n-2} + \cdots + 2^n\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}\Big\},\\
P_{nj}(x) &= \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots 2n}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}}\Big\{(x+1)^n - 2\frac{n(n+j)}{1\cdot 2n}(x+1)^{n-1}\\
&\quad + 2^2\frac{n(n-1)(n+j)(n+j-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x+1)^{n-2} - \cdots + (-2)^n\frac{(j+1)(j+2)\cdots n}{(n+j+1)(n+j+2)\cdots 2n}\Big\}.
\end{aligned}$$

Ordnet man in diesen Ausdrücken die Glieder in den Parenthesen in entgegengesetzter Weise, also nach *steigenden* Potenzen von $(x-1)$ resp. $(x+1)$, so folgt:

vorausgesetzt: $j \leq n$.

$$P_{nj}(x) = \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots j}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{j} \times$$
$$\times\left\{1+\frac{(n-j)(n+j+1)}{1(j+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+j+1)(n+j+2)}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots\right\},$$

$$P_{nj}(x) = (-1)^{n-j}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots j}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{j} \times$$
$$\times\left\{1-\frac{(n-j)(n+j+1)}{1(j+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{(n-j)(n-j-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+j+1)(n+j+2)}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\cdots\right\},$$

(31.)

$$P_{nj}(x) = \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots j}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{1+\frac{n(n+1)}{1(j+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots\right\},$$

$$P_{nj}(x) = (-1)^{n-j}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots j}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$
$$\times\left\{1-\frac{n(n+1)}{1(j+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\cdots\right\}.$$

Macht man in diesen Formeln $j=0$, so wird der Zahlenfactor $\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots j}$ gleich 1, wie aus der Ableitung desselben aus den Formeln (30.) sich ergiebt. Somit erhält man:

$$(32.)\qquad P_n(x) = 1+\frac{n(n+1)}{(1)^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\cdots,$$
$$= (-1)^n\left\{1-\frac{n(n+1)}{(1)^2}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\cdots\right\},$$

oder $x=\cos\vartheta$ gesetzt:

$$(33.)\qquad P_n(\cos\vartheta) = 1-\frac{n(n+1)}{(1)^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\sin^4\frac{\vartheta}{2}-\cdots,$$
$$= (-1)^n\left\{1-\frac{n(n+1)}{(1)^2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\cos^4\frac{\vartheta}{2}-\cdots\right\}.$$

Dies sind die von *Dirichlet* gegebenen Reihen, die sich auch dadurch ableiten lassen, dass man

$$P_n(x) = P_n\big(1+(x-1)\big) = P_n\big(-1+(x+1)\big)$$

mittelst des *Taylor*'schen Satzes nach Potenzen von $(x-1)$ resp. $(x+1)$ entwickelt. — Uebrigens erhält man die Ausdrücke in der *ersten* und *zweiten* Formel (31.) durch eben solche Entwicklungen von

$$\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial^j P_n(1+(x-1))}{\partial x^j} = \frac{\partial^j P_n(-1+(x+1))}{\partial x^j}.$$

Die Ausdrücke in der *dritten* und *vierten* Formel (31.) haben im Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren $(x+1)^j$ resp. $(x-1)^j$, und reduciren sich durch Fortschaffung derselben auf die Ausdrücke in der *ersten**) und *zweiten* Formel (31.). Dasselbe gilt von den entsprechenden Ausdrücken in (30.).

§ 6.

Die Integrale Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 für $j>n$. Einführung der Bezeichnungen $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ resp. für Y_1, Y_4 und Y_2, Y_3. Darstellung dieser Ausdrücke $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ mittelst begrenzter Integrale.

Die Ausdrücke für Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (Seite 18) verlieren die Eigenschaft, verschiedene Darstellungen *desselben* particularen Integrals der betrachteten Differentialgleichung zu sein, sobald $j>n$ wird. Zwar bleibt Y_1 mit Y_4 und Y_2 mit Y_3 gleichwerthig, aber das durch Y_1, Y_4 dargestellte Integral wird *verschieden* von dem durch Y_2, Y_3 dargestellten. Ich werde diese beiden particularen Integrale durch $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ bezeichnen:

$$(34.)\qquad S_{nj}(x) = Y_1 = Y_4, \qquad T_{nj}(x) = Y_2 = Y_3, \qquad \text{für } j>n,$$

wo also $A_1 = A_4$ und $A_2 = A_3$ gesetzt ist.

Diese particularen Integrale $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ sind dadurch charakterisirt, dass $S_{nj}(x)$ unendlich wird für $x=1$, und Null für $x=-1$, während umgekehrt $T_{nj}(x)$ unendlich wird für $x=-1$, und Null für $x=+1$. Ausserdem werden beide Integrale $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ unendlich für $x=\infty$.

Das oben (Seite 15) betrachtete particulare Integral $Q_{nj}(x)=Z_1=Z_2=Z_3=Z_4$ kann nur linear aus $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ zusammengesetzt sein. Ich werde nun die in $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ noch enthaltenen disponiblen Constanten A_1 und A_2 der Art bestimmen, dass

$$(35.)\qquad Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x), \qquad (j>n)$$

mithin:

$$0 = S_{nj}(\infty) - T_{nj}(\infty)$$

wird. Hieraus folgt, wie sogleich bemerkt sein mag:

$$(36.)\qquad A_1 = A_2.$$

Denn für *sehr grosse* Werthe von x wird [nach (20.), Seite 18] $S_{nj}(x) = Y_1(x) = A_1(x-1)^n$ und $T_{nj}(x) = Y_2(x) = A_2(x+1)^n$.

*) Setzt man z. B. in der *dritten* Formel (31.) vor der Parenthese den Factor $\left(\frac{x+1}{2}\right)^j$, und dividirt den Ausdruck in der Parenthese durch $\left(\frac{x+1}{2}\right)^j = \left(1+\frac{x-1}{2}\right)^j$, so verwandelt sich diese Formel in die *erste* Formel (31.).

Um den gemeinschaftlichen Werth von A_1, A_2 zu bestimmen, werde ich zuvörderst die Ausdrücke Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (Seite 18) vermittelst *bestimmter Integrale* darstellen. Zu diesem Zweck gebe ich jenen Ausdrücken, was ihre einzelnen Glieder betrifft, die entgegengesetzte Reihenfolge, und erhalte in solcher Weise, indem ich zugleich $A_1 = A_4$ und $A_2 = A_3$ mache:

$$(37.)\quad \begin{aligned}
Y_1 &= (-2)^n A_1 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}\left\{\frac{1}{j} - \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j-1)(j-2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right\},\\
Y_4 &= (-2)^n A_1 \frac{j(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}\left\{\frac{1}{j} - \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j+1)(j+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j+1)\cdots(j+n)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\},\\
Y_2 &= 2^n A_2 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{j}{2}}\left\{\frac{1}{j} + \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j-1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j-1)(j-2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\},\\
Y_3 &= 2^n A_2 \frac{j(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{j}{2}}\left\{\frac{1}{j} + \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j+1)(j+2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right\}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Werthe, welche $P_n(x)$ und die Differentialquotienten $P_n'(x) = \frac{\partial P_n(x)}{\partial x}$, $P_n''(x) = \frac{\partial^2 P_n(x)}{\partial x^2}$, etc. etc. für $x = 1$ annehmen:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad P_n''(1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2.4},$$

$$\cdots\cdots \quad P_n^{(j)}(1) = \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2j},$$

so erkennt man, dass die erste der Formeln (37.) auch so geschrieben werden kann:

$$(38.)\quad \begin{aligned}
Y_1 = (-2)^n A_1 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}(x^2-1)^{\frac{j}{2}}&\left\{\frac{(x-1)^{-j}}{j} P_n(1) - \frac{(x-1)^{-j+1}}{j(j-1)} P_n'(1)\right.\\
&\left. + \frac{(x-1)^{-j+2}}{j(j-1)(j-2)} P_n''(1) - \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^{-j+n}}{j(j-1)\cdots(j-n)} P_n^{(n)}(1)\right\}.
\end{aligned}$$

Diese Formel lässt sogleich erkennen, dass Y_1 durch das Integral $\int^x \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}$ darstellbar ist. Durch partielle Integration erhält man nämlich:

$$(39.)\quad \int^{z} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}} = \frac{(x-z)^{-j}}{j} P_n(z) - \frac{(x-z)^{-j+1}}{j(j-1)} P_n'(z) + \frac{(x-z)^{-j+2}}{j(j-1)(j-2)} P_n''(z) - \cdots + (-1)^n \frac{(x-z)^{-j+n}}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} P_n^{(n)}(z).$$

Dieser Ausdruck verschwindet, weil bei unseren gegenwärtigen Betrachtungen $j > n$, und $P_n(z)$ von der n^{ten} Ordnung ist, für $z = \infty$; so dass man also erhält:

$$(40.)\quad \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}} = \frac{(x-1)^{-j}}{j} P_n(1) - \frac{(x-1)^{-j+1}}{j(j-1)} P_n'(1) + \frac{(x-1)^{-j+2}}{j(j-1)(j-2)} P_n''(1) - \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^{-j+n}}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} P_n^{(n)}(1). \qquad (j > n)$$

Mit Rücksicht hierauf aber folgt aus (38.):

$$(41.)\quad S_{nj}(x) = Y_1 = (-2)^n A_1 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n).$$

In ähnlicher Weise kann $T_{nj}(x) = Y_2$ behandelt werden. Beachtet man nämlich die Formeln:

$$P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n'(-1) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad P_n''(-1) = (-1)^{n+2} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4},$$

$$\cdots\cdots \quad P_n^{(j)}(-1) = (-1)^{n+j} \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2j},$$

so kann der Ausdruck Y_2 in (37.) folgendermassen geschrieben werden:

$$(42.)\quad Y_2 = (-2)^n A_2 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \left\{ \frac{(x+1)^{-j}}{j} P_n(-1) - \frac{(x+1)^{-j+1}}{j(j-1)} P_n'(-1) + \frac{(x+1)^{-j+2}}{j(j-1)(j-2)} P_n''(-1) - \cdots + (-1)^n \frac{(x+1)^{-j+n}}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} P_n^{(n)}(-1) \right\};$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (39.):

$$(43.)\quad T_{nj}(x) = Y_2 = (-2)^n A_2 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n).$$

Die Formeln (41.) und (43.) haben zwei Voraussetzungen, nämlich ausser der Voraussetzung $j > n$, noch die, dass der Integrationsweg die Stelle $z = x$ vermeidet. Ist also z. B. x reell und grösser als 1, so wird die Integration auf reellem Wege von $-\infty$ bis $+1$ resp. -1 stattfinden können. Ist ferner x reell und zwischen 0 und 1 gelegen, so kann die eine Integration von $+\infty$ bis $+1$, die andere von $-\infty$ bis -1 ausgeführt werden.

Diese eben bezeichneten reellen Wege sind stets zulässig, wenn x imaginär oder complex ist. Im Allgemeinen aber hat man z auf einem complexen Wege aus dem Unendlichen bis $+1$ resp. -1 fortschreiten zu lassen.

§ 7.

Directer Nachweis dafür, dass die für $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ gefundenen begrenzten Integrale der betrachteten Differentialgleichung Genüge leisten.

Wir wollen das Integral betrachten:

$$K = (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_\alpha^\beta \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \tag{1.}$$

unter der Voraussetzung, dass die (complexen) Grenzen α, β unabhängig von x sind, und dass der Integrationsweg die Stelle $z = x$ vermeidet. Alsdann ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial\left((x^2-1)\frac{\partial K}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{j^2 K}{x^2-1} + (j+1)(x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_\alpha^\beta \left(j - \frac{2(j+1)x}{x-z} + \frac{(j+2)(x^2-1)}{(x-z)^2}\right) \frac{P_n(z)\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \tag{2.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$= \frac{j^2 K}{x^2-1} + (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_\alpha^\beta \frac{(j+1)(jz^2+2xz-(j+2))\,P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+3}}, \tag{3.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$= \frac{j^2 K}{x^2-1} + (x^2-1)^{\frac{j}{2}} \int_\alpha^\beta \frac{\partial\left((z^2-1)\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z} P_n(z)\,\partial z, \tag{4.}$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung $\frac{1}{(x-z)^{j+1}} = U$ gesetzt ist. Diese Formel aber gewinnt mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((z^2-1)P_n(z)\frac{\partial U}{\partial z} - (z^2-1)U\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial\left((z^2-1)\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z}P_n(z) - \frac{\partial\left((z^2-1)\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right)}{\partial z}U,$$

$$= \frac{\partial\left((z^2-1)\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z}P_n(z) - n(n+1)P_n(z)\,U,$$

und mit Rückblick auf (1.) die Gestalt:

$$\frac{\partial\left((x^2-1)\frac{\partial K}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{j^2 K}{x^2-1} + n(n+1)K + (x^2-1)^{\frac{j}{2}}\left[(z^2-1)P_n(z)\frac{\partial U}{\partial z} - (z^2-1)U\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right]_\alpha^\beta. \tag{5.}$$

Das letzte Glied rechter Hand nimmt, falls man für U seine eigentliche Bedeutung substituirt, die Gestalt an:

$$-(x^2-1)^{\frac{j}{2}}\left[\frac{(z^2-1)\big((j+1)P_n'(z)+(x-z)P_n''(z)\big)}{(x-z)^{j+2}}\right]_\alpha^\beta,$$

und wird also, weil $j>n$ sein soll, verschwinden, sobald man $\alpha=\infty$ und gleichzeitig $\beta=+1$ oder -1 setzt. Somit folgt aus (5.):

$$\frac{\partial\left((x^2-1)\dfrac{\partial K}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{j^2 K}{x^2-1}+n(n+1)K. \tag{6.}$$

Hiemit ist dargethan, dass das Integral (1.), falls man darin $\alpha=\infty$ und $\beta=\pm 1$ setzt, eine particulare Lösung der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) repräsentirt, vorausgesetzt, dass $j>n$ ist.

§ 8.

Bestimmung der in $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ enthaltenen constanten Factoren.

Aus der schon früher [(35.), Seite 22] getroffenen Festsetzung:

$$Q_{nj}(x)=S_{nj}(x)-T_{nj}(x) \tag{1.}$$

ergab sich:

$$A_1=A_2; \tag{2.}$$

und es handelt sich also nur noch um den gemeinschaftlichen Werth von A_1, A_2, wozu ebenfalls die Festsetzung (1.) die Mittel darbietet.

Substituirt man nämlich in (1.) für $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ die Werthe (41.), (43.), Seite 24, so wird:

$$Q_{nj}(x)=(-2)^n A_1\frac{j(j-1)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}(x^2-1)^{\frac{j}{2}}\left\{\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}-\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\right\},\quad (j>n), \tag{3.}$$

oder, falls man die beiden Integrationswege von ∞ bis zum Punkt -1 miteinander zusammenfallen lässt:

$$Q_{nj}(x)=(-2)^n A_1\frac{j(j-1)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}(x^2-1)^{\frac{j}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}},\qquad (j>n). \tag{4.}$$

Hier nun ist für $Q_{nj}(x)$ derjenige Werth zu setzen, durch welchen diese Function in der Einleitung (Seite 2) definirt wurde, nämlich:

$$Q_{nj}(x)=(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\frac{\partial^j Q_n(x)}{\partial x^j}=h_j(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \tag{5.}$$

wo

$$h_j = (-1)^j (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j)\,. \tag{6.}$$

Somit folgt:

$$(-2)^n A_1 \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = (-1)^{\frac{j}{2}} h_j\,, \tag{7.}$$

wodurch der Werth von $A_1 = A_2$ bestimmt ist.

Mit Rücksicht auf (7.) nehmen nun die Formeln (41.), (43.), Seite 24, sowie die Formel (4.) des gegenwärtigen § folgende Gestalt an:

$$S_{nj}(x) = Y_1 = h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\,, \qquad (j > n)\,, \tag{8.a}$$

$$T_{nj}(x) = Y_2 = h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\,, \qquad (j > n)\,, \tag{8.b}$$

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - T_{nj}(x) = h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\,. \qquad (j > n)\,. \tag{8.c}$$

Bemerkung. — Zwischen $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ findet eine einfache Beziehung statt. Setzt man nämlich in (8.a): $x = -\xi$ und $z = -\zeta$, und beachtet, dass $P_n(-\zeta) = (-1)^n P_n(\zeta)$ ist, so folgt:

$$S_{nj}(x) = (-1)^{j+n} h_j (1-\xi^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(\zeta)\,\partial \zeta}{(\xi-\zeta)^{j+1}}\,,$$

d. i. mit Rücksicht auf (8.b):

$$S_{nj}(x) = (-1)^{j+n} T_{nj}(\xi)\,,$$

oder, weil $\xi = -x$ ist:

$$S_{nj}(x) = (-1)^{j+n} T_{nj}(-x)\,, \qquad (j > n)\,. \tag{9.}$$

Mit Rücksicht auf diese zwischen S_{nj} und T_{nj} vorhandene Relation kann die Formel (8.c) auch so geschrieben werden:

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - (-1)^{j+n} S_{nj}(-x)\,, \qquad (j > n)\,, \tag{10.}$$

oder auch so:

$$Q_{nj}(x) = (-1)^{j+n} T_{nj}(-x) - T_{nj}(x)\,, \qquad (j > n)\,. \tag{10.a}$$

§ 9.

Weitere Betrachtung der für $S_{nj}(x)$ und $T_{nj}(x)$ aufgestellten bestimmten Integrale.

Die Ausdrücke für Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (Seite 18 und 23) geben eben so viel verschiedene Ausdrücke für die Integrale:

$$\int_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} \quad \text{und} \quad \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}},$$

vorausgesetzt, dass $j > n$. Setzt man nämlich in (8.[a, b]), d. i. in

$$\text{(11.)} \qquad \begin{aligned} \int_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} &= \frac{Y_1}{h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}}}, \\ \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} &= \frac{Y_2}{h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}}} \end{aligned}$$

für $Y_1 = Y_4$ und $Y_2 = Y_3$ die Werthe, Seite 18 und 23, und beachtet, dass nach (7.)

$$\text{(12.)} \qquad A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{h_j}{(-2)^n} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} (-1)^{\frac{j}{2}}$$

ist, so erhält man einerseits:

$$\text{(13.)} \qquad \int_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = \qquad \text{(vorausgesetzt: } j > n)$$

$$= \frac{1}{(x-1)^j} \left\{ \frac{1}{j} - \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j-1)} \left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j-1)(j-2)} \left(\frac{x-1}{1}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \right\},$$

$$= \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x-1)^j} \left\{ \frac{1}{j} - \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j+1)} \left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j+1)(j+2)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \cdots + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j+1)\cdots(j+n)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \right\},$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x-1)^j} \left\{ (x-1)^n - 2\frac{n(j-n)}{1\cdot 2n} (x-1)^{n-1} + 2^2 \frac{n(n-1)(j-n)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)} (x-1)^{n-2} - \right.$$
$$\left. - \cdots + (-1)^n \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \right\},$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x-1)^j} \left\{ (x+1)^n - 2\frac{n(j-n)}{1\cdot 2n} (x-1)^{n-1} + 2^2 \frac{n(n-1)(j+n)(j+n+1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)} (x+1)^{n-2} - \right.$$
$$\left. - \cdots + (-1)^n \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \right\},$$

und andererseits:

$$(14.)\qquad \int\limits_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = \qquad \text{(wiederum vorausgesetzt: } j > n)$$

$$= (-1)^n \frac{1}{(x+1)^j} \left\{ \frac{1}{j} + \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j-1)} \left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j-1)(j-2)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \right\},$$

$$= (-1)^n \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x+1)^j} \left\{ \frac{1}{j} + \frac{n(n+1)}{1\cdot j(j+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot j(j+1)(j+2)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j+1)\cdots(j+n)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \right\},$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x+1)^j} \left\{ (x+1)^n + 2\frac{n(j-n)}{1\cdot 2n}(x+1)^{n-1} + 2^2 \frac{n(n-1)(j-n)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x+1)^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \cdots + 2^n \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \right\},$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{j(j-1)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x+1)^j} \left\{ (x-1)^n + 2\frac{n(j+n)}{1\cdot 2n}(x-1)^{n-1} + 2^2 \frac{n(n-1)(j+n)(j+n-1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)}(x-1)^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \cdots + 2^n \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \right\}.$$

Aus der *zweiten* Formel (13.) und der *zweiten* Formel (14.) ergeben sich die specielleren Formeln*):

$$(15.)\qquad \left(\int\limits_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} \right)_{x=-1} = \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}, \qquad (j>n),$$

$$(16.)\qquad \left(\int\limits_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} \right)_{x=+1} = \frac{(-1)^n}{2^j} \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}, \qquad (j>n).$$

Desgleichen folgt aus der *ersten* Formel (13.) und der *ersten* Formel (14.):

$$(17.)\qquad \left((x-1)^j \int\limits_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} \right)_{x=+1} = \frac{1}{j}, \qquad (j>n),$$

$$(18.)\qquad \left((x+1)^j \int\limits_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} \right)_{x=-1} = \frac{(-1)^n}{j}, \qquad (j>n).$$

Ersetzt man in (15.), (16.), (17.), (18.) die begrenzten Integrale durch die Functionen S_{nj}, T_{nj} ($8.^{a,\,b}$), so folgt mit Rücksicht auf (6.):

*) Die Werthe der Integrale (15.), (16.) für $x = 0$ ergeben sich am Einfachsten vermittelst der im folgenden § anzustellenden Transformation.

$$\left(\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} S_{nj}(x)\right)_{x=-1} = \frac{1}{2^j}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}, \qquad (j>n), \tag{19.}$$

$$\left(\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} T_{nj}(x)\right)_{x=+1} = \frac{(-1)^{j+n}}{2^j}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{j(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}, \qquad (j>n), \tag{20.}$$

$$\left((1-x^2)^{\frac{j}{2}} S_{nj}(x)\right)_{x=+1} = 2^j\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)\right), \qquad (j>n), \tag{21.}$$

$$\left((1-x^2)^{\frac{j}{2}} T_{nj}(x)\right)_{x=-1} = (-1)^{n+j}\,2^j\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)\right), \qquad (j>n). \tag{22.}$$

Bemerkung. — Mittelst der Formeln (15.), (16.), (17.), (18.) ergeben sich aus (13.), (14.) mehrere *identische* Relationen zwischen j und n, so z. B. folgende:

$$\frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} = 1 + \frac{n(n+1)}{1\cdot(j-1)} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot(j-1)(j-2)} + \cdots\cdots \tag{23.}$$

$$\frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = 1 + \frac{n(j-n)}{1\cdot 2n} + \frac{(n-1)n(j-n)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 2n(2n-1)} + \cdots\cdots \tag{24.}$$

Es folgt nämlich (23.) aus (15.) und der *ersten* Formel (13.); andererseits (24.) aus (15.) und der *dritten* Formel (13.). Diese Relationen (23.), (24.) sind offenbar *identische*, also *nicht* mehr gebunden an die Voraussetzung $j>n$.

Zweite Bemerkung. — Offenbar ist:

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = (-1)^h(j+1)(j+2)\cdots(j+h)\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+h+1}}, \tag{25.}$$

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = (-1)^h(j+1)(j+2)\cdots(j+h)\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+h+1}}. \tag{26.}$$

Aus (25.) und (15.) folgt:

$$\left(\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\right)_{x=-1} = \frac{(-1)^j}{2^{j+h}}\,\frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+h+n)}{(j+h)(j+h-1)\cdots(j+h-n)}, \qquad (j>n); \tag{27.}$$

ferner folgt aus (25.) und (17.):

$$\left((x-1)^{j+h}\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\right)_{x=+1} = (-1)^h(j+1)(j+2)\cdots(j+h-1), \qquad (j>n); \tag{28.}$$

ferner folgt aus (26.) und (16.):

$$\left(\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\right)_{x=+1} = \frac{(-1)^{n+h}}{2^{j+h}}\,\frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+h+n)}{(j+h)(j+h-1)\cdots(j+h-n)}, \qquad (j>n); \tag{29.}$$

endlich folgt aus (26.) und (18.):

$$(30.)\quad \left((x+1)^{j+h}\frac{\partial^h}{\partial x^h}\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\right)_{x=-1} = (-1)^{n+h}(j+1)(j+2)\cdots(j+h-1), \qquad (j>n).$$

§ 10.

Darstellung der Functionen S_{nj}, T_{nj}, Q_{nj} durch eine andere Art begrenzter Integrale, welche die der zweiten Gattung genannt werden mögen.

Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$(31.)\quad \int_\alpha^\beta (x-z)^{j-1}P_n(z)\,\partial z =$$

$$= -\left[\frac{(x-z)^j}{j}\left\{P_n(z)+\frac{x-z}{j+1}P'_n(z)+\frac{(x-z)^2}{(j+1)(j+2)}P''_n(z)\cdots+\frac{(x-z)^n}{(j+1)\cdots(j+n)}P_n^{(n)}(z)\right\}\right]_\alpha^\beta,$$

wo $P_n^{(h)}(z)$ für $\frac{\partial^h P_n(z)}{\partial z^h}$ steht. Der hier auf der rechten Seite in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck verschwindet für $z=x$, falls nur $j>0$ ist. Unter dieser Voraussetzung gelangt man daher, indem man $\alpha=x$ und $\beta=-1$ oder $+1$ macht, zu folgenden Formeln*):

(vorausgesetzt: $j>0$)

$$(32.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^{-1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\partial z = (-1)^{n+1}\frac{(x+1)^j}{j}\left\{1-\frac{n(n+1)}{1\cdot(j+1)}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot(j+1)(j+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \right. \\ \displaystyle\qquad\left. -\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\cdots2n}{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}, \\ \displaystyle\int_x^{+1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\partial z = -\frac{(x-1)^j}{j}\left\{1+\frac{n(n+1)}{1\cdot(j+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot(j+1)(j+2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right. \\ \displaystyle\qquad\left.+\cdots+\frac{(n+1)(n+2)\cdots2n}{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n\right\}. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Vergleichung mit der zweiten Formel (13.) und der zweiten Formel (14.):

(vorausgesetzt: $j>n$ und $j>0$)

$$(33.)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{(-1)^{n+1}}{(x+1)^j}\int_x^{-1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\partial z = \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}(x-1)^j\int_\infty^{+1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \\ \displaystyle\frac{(-1)^{n+1}}{(x-1)^j}\int_x^{+1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\partial z = \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}(x+1)^j\int_\infty^{-1}\frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}. \end{cases}$$

---

*) Vergl. die auf Seite 23, 24 für $P_n(1)$, $P'_n(1)$, $\cdots$ und $P_n(-1)$, $P'_n(-1)$, $\cdots$ angegebenen Werthe.

Vermittelst dieser Formeln erhält man für die Integrale rechter Hand folgende Ausdrücke:

(vorausgesetzt: $j > n$ und $j > 0$)

$$(34.)\quad \begin{cases} \int\limits_{\infty}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x^2-1)^j} \int\limits_{x}^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,, \\ \int\limits_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \frac{1}{(x^2-1)^j} \int\limits_{x}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,. \end{cases}$$

Substituirt man diese Ausdrücke (34.) in den Formeln (8.[a, b, c]), und nimmt man dabei Rücksicht auf die Bedeutung von h_j (6.), so folgt:

(vorausgesetzt: $j > n$ und $j > 0$)

$$(35.)\quad \begin{cases} S_{nj}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int\limits_{x}^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,, \\ T_{nj}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int\limits_{x}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,. \end{cases}$$

Nun ist nach (1.): $Q_{nj}(x) = -\big(T_{nj}(x) - S_{nj}(x)\big)$. Lässt man also die beiden Integrationswege in (35.) längs der Strecke $\infty \cdots\cdots -1$ miteinander zusammenfallen, so folgt:

(vorausgesetzt: $j > n$ und $j > 0$)

$$(36.)\qquad Q_{nj}(x) = (-1)^n \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int\limits_{-1}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,;$$

wobei zu bemerken, dass sowohl in (35.) wie in (36.) der Zahlenfactor $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}$ für $n = 0$ in $(1\,.\,2\cdot 3\cdots j)$ sich verwandelt. Die begrenzten Integrale in (35.), (36.) mögen, zur Unterscheidung von den früheren (8.[a, b, c]), als *Integrale zweiter Gattung* bezeichnet werden.

§ 11.

Nähere Untersuchung desjenigen begrenzten Integrals zweiter Gattung, durch welches die Function Q_{nj} dargestellt ist.

Die Formel (36.) scheint nach ihrer Ableitung den beiden Voraussetzungen: $j > n$ und $j > 0$ zu unterliegen. Wir wollen untersuchen, zu welchen Resultaten diese Formel führt, wenn wir jene Voraussetzungen *verlassen*.

Macht man zunächst $j = 0$, so nimmt die Formel (36.) folgende Gestalt an:

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{x - z}; \tag{37.}$$

was mit der Definition von $Q_n(x)$ übereinstimmt.

Setzt man ferner: $j \leq n$, d. i. $j = 0, 1, 2, \cdots n$, oder, weil der Fall $j = 0$ bereits absolvirt ist:

$$j = 1, 2, \cdots n, \tag{38.}$$

so nimmt die rechte Seite der Formel (36.) die Gestalt $\frac{0}{0}$ an. Denn es enthält jene rechte Seite den Divisor $(j - 1)(j - 2)\cdots(j - n)$, und den Factor $\int_{-1}^{+1}(x - z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z$, welcher, wenn j der Voraussetzung (38.) entspricht, gleichfalls verschwindet*).

Um diesen Werth $\frac{0}{0}$ zu bestimmen, setzen wir:

$$j = p + \alpha, \tag{39.}$$

wo p eine der Zahlen $1, 2, \cdots n$ vorstellen soll, während α irgend einen zwischen 0 und 1 liegenden Bruch repräsentiren mag, der beliebig nahe an 0 herangedrückt werden kann. Alsdann ergiebt sich für Binom $(x - z)^{j-1}$ eine *unbegrenzte* Reihe, welche fortschreitet nach den aufeinanderfolgenden Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, \cdots\cdot$ Substituirt man diese Reihe in das zu berechnende Integral (36.):

$$W = \int_{-1}^{+1} (x - z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z, \tag{40.}$$

so fallen sämmtliche Glieder fort, welche den Potenzen $z^0, z^1, z^2, \cdots z^{n-1}$ entsprechen**), desgleichen sämmtliche Glieder, welche mit den Potenzen $z^{n+1}, z^{n+3}, z^{n+5}, \cdots\cdot$ behaftet sind***). Somit folgt:

---

*) Entwickelt man nämlich das Binom $(x - z)^{j-1}$ nach Potenzen von z, so erhält man, falls j der Voraussetzung (38.) entspricht, nur solche Potenzen von z, deren Exponenten kleiner als n sind. Nach bekanntem Satze ist aber

$$\int_{-1}^{+1} z^q P_n(z)\,\partial z = 0,$$

falls $q = 0, 1, 2, \cdots (n - 1)$.

**) Solches folgt aus dem in der vorhergehenden Note genannten Satz.

***) Dies folgt aus dem bekannten Satz, dass

$$\int_{-1}^{+1} z^q P_n(z)\,\partial z = 0$$

ist, falls $n + q$ eine *ungerade* Zahl vorstellt.

$$W = f \int_{-1}^{+1} \left\{ z^n + \frac{(j-n-1)(j-n-2)}{(n+1)(n+2)} \frac{z^{n+2}}{x^2} + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j-n-3)(j-n-4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \frac{z^{n+4}}{x^4} + \cdots \right\} P_n(z) \partial, z$$

oder kürzer geschrieben:

$$W = f \left\{ W_n^n + \frac{(j-n-1)(j-n-2)}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{x^2} W_n^{n+2} + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j-n-3)(j-n-4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \frac{1}{x^4} W_n^{n+4} + \cdots \right\},$$

wo f und W_n^q die Bedeutungen haben:

$$f = (-1)^n \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^{j-n-1},$$

$$W_n^q = \int_{-1}^{+1} z^q P_n(z) \partial z.$$

Zwischen diesen Integralen W_n^q finden die Relationen statt:

$$W_n^{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} W_n^n,$$

$$W_n^{n+4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} W_n^n,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$W_n^{n+2q} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+2q)}{2 \cdot 4 \cdots 2q \cdot (2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2q+1)} W_n^n.$$

Somit folgt:

$$W = f W_n^n \left\{ 1 + \frac{(j-n-1)(j-n-2)}{2 \cdot (2n+3)} \frac{1}{x^2} + \frac{(j-n-1)(j-n-2)(j-n-3)(j-n-4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^4} + \cdots \right\}. \tag{41.}$$

Was endlich das Integral W_n^n betrifft, so hat der Werth desselben eine verschiedene Form, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Und zwar erhält man für ein gerades n:

$$f W_n^n = \left((-1)^n \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^{j-n-1} \right) \left(2 \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{(n+1)(n+3)\cdots(2n+1)} \right),$$

andererseits für ein ungerades n:

$$f W_n^n = \left((-1)^n \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^{j-n-1} \right) \left(2 \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{(n+2)(n+4)\cdots(2n+1)} \right);$$

folglich im einen wie im andern Fall:

$$f W_n^n = (-1)^n \cdot 2 x^{j-n-1} \frac{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n+1)}. \tag{42.}$$

Somit ergiebt sich schliesslich, wenn man (42.) in (41.), und sodann (41.) in (36.) substituirt:

$$(43.)\qquad Q_{nj}(x) = 2x^{j-n-1}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \times$$

$$\times\left\{1+\frac{(j-n-1)(j-n-2)}{2\cdot(2n+3)}\frac{1}{x^2}+\frac{(j-n-1)(j-n-2)(j-n-3)(j-n-4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\frac{1}{x^4}+\cdots\right\}.$$

Diese Entwicklung ist aber identisch mit der auf Seite 13 gefundenen.

Durch die Betrachtungen des gegenwärtigen § ist also bewiesen, dass die Formel (36.) *nicht* gebunden ist an die Voraussetzungen $j > n$ und $j > 0$, *sondern allgemein gilt für jeden beliebigen Werth von* j.

§ 12.

Nähere Untersuchung derjenigen begrenzten Integrale zweiter Gattung, durch welche die Functionen S_{nj} und T_{nj} dargestellt sind.

Die in (35.) für S_{nj} und T_{nj} gefundenen Ausdrücke besitzen, abgesehen von gewissen constanten Factoren, die Form:

$$(44.)\qquad Y = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}}\int_x^{\pm 1}(x-z)^{j-1}\,P_n(z)\,\partial z\,,$$

sind aber nur unter der Voraussetzung entstanden, dass $j > n$ und $j > 0$ sei. Dieses Y wird also unter der eben genannten Voraussetzung ein particulares Integral der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) vorstellen. Ich werde nun nachweisen, dass solches *allgemein* stattfindet, einerlei ob j grösser oder kleiner als n ist, *ausgenommen im Fall* $j = 0$.

Aus (44.) folgt, falls $j > 2$ ist:

$$(1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{jx}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\int_x^{\pm 1}(x-z)^{j-1}\,P_n(z)\,\partial z + \frac{j-1}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}-1}}\int_x^{\pm 1}(x-z)^{j-2}\,P_n(z)\,\partial z\,,$$

und nach einigen Reductionen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{j^2 Y}{1-x^2} + \frac{j-1}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\int_x^{\pm 1}(x-z)^{j-3}\Big((j-2)(1-z^2)+2(x-z)\,z\Big)\,P_n(z)\,\partial z\,,$$

$$= \frac{j^2 Y}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\int_x^{\pm 1}\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial U}{\partial z}\right)P_n(z)\,\partial z\,,$$

wo U zur Abkürzung steht für $(x-z)^{j-1}$. Diese Gleichung verwandelt sich, wenn die rechte Seite partiell integrirt, und für $\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial P_n}{\partial z}\right)$ sein Werth: $-n(n+1)\,P_n(z)$ substituirt wird, in:

$$(45.)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right)-\frac{j^2 Y}{1-x^2}+n(n+1)Y=$$

$$=\frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\left[(1-z^2)\left\{(j-1)(x-z)^{j-2}P_n(z)+(x-z)^{j-1}\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right\}\right]_x^{\pm 1}.$$

Bei Bildung dieser Formel ist $j>2$ vorausgesetzt worden, um die Differentiation nach der untern Grenze des Integrals (44.) unberücksichtigt lassen zu können. Unter derselben Voraussetzung $j>2$ verschwindet aber die rechte Seite der Formel (45.). Es wird also für $j>2$ die Formel (45.) identisch mit der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9). Folglich ist das vollständige Integral dieser Differentialgleichung für $j>2$ darstellbar durch:

$$(46.)\quad Y=\frac{M}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\int_x^{-1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\,\partial z+\frac{N}{(1-x^2)^{\frac{j}{2}}}\int_x^{+1}(x-z)^{j-1}P_n(z)\,\partial z,$$

wo M, N willkürliche Constanten sind.

Wenn $j=1$ oder $=2$ ist, wird die rechte Seite der Formel (45.) eine unbestimmte Grösse, deren Werth von Gliedern von der Form 0^0 abhängt; und Aehnliches findet alsdann auch statt bei denjenigen Gliedern, die aus der Differentiation des Integrals (44.) nach seiner untern Grenze entspringen. Die directe Ermittelung des wahren Werthes all' dieser Glieder von der Form 0^0 erschien mir bedenklich. Ich vermeide sie durch einen indirecten Weg, indem ich in jenen Fällen $j=1$ oder $=2$ das Integral Y (44.) weiter entwickle, und dann erst dieses entwickelte Y in die zu betrachtende Differentialgleichung (Seite 9) substituire.

Erster Fall: $j=1$, mithin:

$$Y=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\int_x^{\pm 1}P_n(z)\,\partial z.$$

Hieraus aber erhält man sofort, weil $P_n(z)=\frac{-1}{n(n+1)}\frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right)$ ist:

$$Y=\frac{-1}{n(n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\left[(1-z^2)\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}\right]_x^{\pm 1},$$

$$(47.)\quad \text{d. i.}\quad Y=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}\frac{\partial P_n(x)}{\partial x}.$$

Dieses Y genügt, wie man leicht erkennt, der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9), wenn in derselben $j=1$ gesetzt wird. Somit ist bewiesen, dass der Ausdruck (44.) *auch* für $j=1$ ein particulares Integral

jener Differentialgleichung ist. — Nur in dem besondern Falle $n = 0$, wo $\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} = 0$, mithin der Ausdruck Y (47.) gleich $\frac{0}{0}$ wird, ist dieser Beweis unzureichend. Wird aber $j = 1$ und $n = 0$, so nimmt der Ausdruck Y (44.) die Gestalt an:

$$Y = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \int_x^{\pm 1} \partial z \,;$$

woraus sich ergiebt:

$$Y = \frac{\pm 1 - x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{48.}$$

ein Ausdruck, welcher in der That der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) für $j = 1$ und $n = 0$ Genüge leistet*).

Zweiter Fall: $j = 2$. Alsdann ist nach (44.):

$$Y = \frac{1}{1-x^2} \int_x^{\pm 1} (x - z) P_n(z) \partial z \,. \tag{49.}$$

Um dieses Y näher zu berechnen, sei bemerkt, dass

$$\int P_n(z) \partial z = -\frac{1-z^2}{n(n+1)} P'_n(z)$$

ist**), wie sich solches leicht ergiebt aus der bekannten Differentialgleichung für P_n. Hieraus folgt sofort:

$$x \int_x^{\pm 1} P_n(z) \partial z = \frac{(1-x^2)\,x}{n(n+1)} P'_n(x) \,. \tag{α.}$$

Ferner ist, wie leicht zu verificiren:

$$z P_n(z) = \frac{1}{2n+1}\Big(n P_{n-1}(z) + (n+1) P_{n+1}(z)\Big),$$

woraus durch Integration und mit Rücksicht auf die Differentialgleichung für P_n, resp. P_{n-1} und P_{n+1} sich ergiebt:

---

*) Demgemäss wird also der mit den willkürlichen Constanten M, N behaftete Ausdruck:

$$Y = \frac{M(1+x) + N(1-x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

das vollständige Integral sein für die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{Y}{1-x^2} = 0 \,.$$

**) Hier ist, wie auch schon früher gelegentlich geschah, $P'_n(z)$ für $\frac{\partial P_n(z)}{\partial z}$ gesetzt.

$$(\beta.)\qquad \int^{\circ} z\, P_n(z)\, \partial z = -\frac{1-z^2}{(2n+1)(n-1)(n+2)}\Big((n+2)\, P'_{n-1}(z) - (n-1)\, P'_{n+1}(z)\Big).$$

Ferner ist, wie wiederum leicht zu verificiren:

$$(n+1)\, P'_{n-1}(z) + n\, P'_{n+1}(z) = (2n+1)\, z\, P'_n(z),$$

$$P'_{n-1}(z) - P'_{n+1}(z) = -(2n+1)\, P_n(z),$$

woraus durch Summation folgt:

$$(\gamma.)\qquad (n+2)\, P'_{n-1}(z) + (n-1)\, P'_{n+1}(z) = (2n+1)\Big(z\, P'_n(z) - P_n(z)\Big).$$

Durch Substitution dieses Werthes $(\gamma.)$ in $(\beta.)$ folgt:

$$(\delta.)\qquad \int^{\circ} z\, P_n(z)\, \partial z = -\frac{1-z^2}{(n-1)(n+2)}\Big(z\, P'_n(z) - P_n(z)\Big),$$

mithin:

$$(\varepsilon.)\qquad \int_x^{+1} z\, P_n(z)\, \partial z = \frac{1-x^2}{(n-1)(n+2)}\Big(x\, P'_n(x) - P_n(x)\Big).$$

Nunmehr folgt durch Subtraction der beiden Formeln $(\alpha.)$ und $(\varepsilon.)$:

$$(\zeta.)\qquad \int_x^{+1} (z-x)\, P_n(z)\, \partial z = \frac{1-x^2}{(n-1)(n+2)}\left(\frac{2\, x\, P'_n(x)}{n(n+1)} - P_n(x)\right),$$

oder, mit Rücksicht auf die bekannte Differentialgleichung für P_n:

$$(\eta.)\qquad \int_x^{+1} (z-x)\, P_n(z)\, \partial z = \frac{(1-x^2)^2}{(n-1)\, n\, (n+1)(n+2)}\, P''_n(x).$$

Somit resultirt für Y (49.) der Werth:

$$(50.)\qquad Y = \frac{-(1-x^2)\, P''_n(x)}{(n-1)\, n\, (n+1)(n+2)},$$

oder, was dasselbe:

$$(51.)\qquad Y = \frac{-P_{n,2}(x)}{(n-1)\, n\, (n+1)(n+2)};$$

wodurch erwiesen ist, dass der allgemeine Ausdruck Y (44.) *auch* für $j = 2$ ein particulares Integral der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) vorstellt. Unzureichend ist der Beweis nur in den Specialfällen, dass $n = 0$ oder $= 1$ ist, weil alsdann der Ausdruck (50.), (51.) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Diese Fälle $n = 0$ und $n = 1$ bedürfen daher einer besondern Untersuchung.

Specialfall: $j = 2$, $n = 0$. Alsdann ist nach (44.):

$$Y = \frac{1}{1-x^2}\int_x^{\pm 1}(x-z)\,\partial z\,,$$

(52.) d. i.
$$Y = -\frac{1}{2}\,\frac{(1\pm x)^2}{1-x^2}\,;$$

woraus folgt, dass der allgemeine Ausdruck Y (44.) auch in diesem Fall der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) Genüge leistet.

Specialfall: $j=2$, $n=1$. Alsdann ist nach (44.):

$$Y = \frac{1}{1-x^2}\int_x^{\pm 1}(x-z)\,z\,\partial z\,,$$

(53.) d. i.
$$Y = -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{2+x}{6}\right) \quad \text{oder} \quad = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{2-x}{1}\right)\,;$$

woraus folgt, dass der allgemeine Ausdruck Y (44.) auch in diesem Falle der betrachteten Differentialgleichung (Seite 9) Genüge leistet.

Resultat. *Aus den eben angestellten Untersuchungen geht hervor, dass der Ausdruck* Y (44.) *für alle Werthe von* n *und* j *der betrachteten Differentialgleichung* (Seite 9) *Genüge leistet, ausser im Falle* $j=0$. In der That haben wir den Fall $j=0$ unbeachtet gelassen, und zwar deswegen, weil der Ausdruck Y (44.) in diesem Falle unendlich gross wird.

§ 13.

Darstellung der Functionen P_{nj} vermittelst der begrenzten Integrale zweiter Gattung.

Unter den begrenzten Integralen zweiter Gattung haben wir folgende verstanden [vgl. (44.)]:

(54.a)
$$Y = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}}\int_x^{-1}(x-z)^{j-1}\,P_n(z)\,\partial z\,,$$

(54.b)
$$Y = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}}\int_x^{+1}(x-z)^{j-1}\,P_n(z)\,\partial z\,,$$

von denen das eine für $x=-1$, das andere für $x=+1$ verschwindet. Dass sich vermittelst derselben die Functionen S_{nj}, T_{nj}, Q_{nj} in einfacher Weise ausdrücken lassen, ist bereits in (35.), (36.) gezeigt. — Wir wollen nunmehr zeigen, wie sich vermittelst derselben auch die Functionen P_{nj} darstellen lassen. Dabei werden wir uns auf denjenigen Spielraum beschränken,

für welchen diese Functionen P_{nj} definirt sind, d. i. auf den Spielraum $j \leqq n$. (Vgl. die Einleitung, Seite 2.)

Da $P_{nj}(x)$ für $x = -1$ verschwindet, so ist $P_{nj}(x)$ gleichwerthig mit dem Integral (54.[a]), zufolge des Satzes I (Seite 9). Ebenso ergibt sich die Gleichwerthigkeit von $P_{nj}(x)$ mit dem Integral (54.[b]). Folglich hat man:

$$(55.)\qquad \begin{aligned} P_{nj}(x) &= \alpha \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,, \\ P_{nj}(x) &= \beta \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,. \end{aligned} \qquad (j \leqq n).$$

Zur Bestimmung der noch unbekannten constanten Factoren α und β multipliciren wir diese Formeln mit $(1-x^2)^{\frac{j}{2}}$, und setzen sodann $x = +1$ resp. -1; wodurch sich ergiebt:

$$\begin{aligned} \left((1-x^2)^{\frac{j}{2}} P_{nj}(x)\right)_{x=+1} &= \alpha \int_{+1}^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,, \\ \left((1-x^2)^{\frac{j}{2}} P_{nj}(x)\right)_{x=-1} &= \beta \int_{-1}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,. \end{aligned} \qquad (j \leqq n).$$

Substituirt man hier für $P_{nj}(x)$ die Werthe aus den beiden letzten Formeln (31.), Seite 21, andererseits für die Integrale rechter Hand die *später*, nämlich auf Seite 31 gefundenen Werthe (32.), so erhält man:

$$\alpha = \beta = (-1)^{j+1} \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}\,,$$

also schliesslich:

$$(56.)\qquad \begin{aligned} P_{nj}(x) &= (-1)^{j+1} \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots(j-1)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,, \\ P_{nj}(x) &= (-1)^{j+1} \frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}{1\cdot 2\cdots(j-1)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_x^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,; \end{aligned} \qquad (j \leqq n).$$

woraus beiläufig folgt, dass die beiden Integrale rechter Hand für $j \leqq n$ unter einander identisch sind.

§ 14.

Ableitung einiger Hülfsformeln.

Behufs der in den folgenden §§ anzustellenden Untersuchungen soll hier der Werth des Integrals

$$\mathfrak{L} = \int_0^{\pm 1} z^{j-1} P_n(z)\,\partial z \tag{1.}$$

berechnet werden; wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind.

Erster Fall: $n =$ *gerade.* Alsdann verschwindet bekanntlich $\mathfrak{L}$ für $j = 1, 3, 5, \cdots (n-1)$, während gleichzeitig $P_n(z)$ die Form hat:

$$P_n(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_2 z^{n-2} + \alpha_4 z^{n-4} + \cdots + \alpha_n\,. \tag{2.}$$

Somit ergiebt sich:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^j \left(\frac{\alpha_0}{n+j} + \frac{\alpha_2}{n+j-2} + \frac{\alpha_4}{n+j-4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{j} \right), \tag{3.}$$

oder, Alles auf gleiche Benennung gebracht:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^j \frac{A_0 j^{\frac{n}{2}} + A_1 j^{\frac{n}{2}-1} + A_2 j^{\frac{n}{2}-2} + \cdots + A_{\frac{n}{2}}}{j(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}, \tag{4.}$$

wo die A, ebenso wie die α, unabhängig von j sind. Hieraus aber folgt, weil (wie schon bemerkt) $\mathfrak{L}$ für $j = 1, 3, 5, \cdots (n-1)$ verschwindet, sofort:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^j A_0 \frac{(j-1)(j-3)(j-5)\cdots(j-n+1)}{j(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}. \tag{5.}$$

Um den nur von n abhängenden Factor A_0 zu bestimmen, betrachten wir den Specialfall: $j = \infty$. Für diesen Fall nimmt die Formel (3.) die Gestalt an:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^j \frac{1}{n+j} (\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n), \qquad (\text{für } j = \infty),$$

d. i. nach (2.):

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^j \frac{1}{n+j} P_n(1) = (\pm 1)^j \frac{1}{n+j} = (\pm 1)^j \frac{1}{j}, \qquad (\text{für } j = \infty).$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (5.) sofort, dass $A_0 = 1$ sein muss. Substituiren wir also in (5.) für $\mathfrak{L}$ seine eigentliche Bedeutung (1.), so erhalten wir schliesslich die Formel:

$$\int_0^{\pm 1} z^{j-1} P_n(z)\,\partial z = (\pm 1)^j \frac{(j-1)(j-3)(j-5)\cdots(j-n+1)}{j(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}, \qquad (n \text{ gerade}), \tag{6.}$$

deren rechte Seite, wie man leicht durch directe Rechnung findet, für $n = 0$ den Werth $(\pm 1)^j \frac{1}{j}$, und für $n = 2$ den Werth $(\pm 1)^j \frac{j-1}{j(j+1)}$ annimmt.

Zweiter Fall: $n =$ *ungerade.* Alsdann verschwindet bekanntlich $\mathfrak{L}$ (1.) für $j = 2, 4, 6, \cdots (n-1)$, während gleichzeitig $P_n(z)$ die Form besitzt:

$$P_n(z) = \beta_0 z^n + \beta_2 z^{n-2} + \beta_4 z^{n-4} + \cdots + \beta_{n-1} z \,. \tag{7.}$$

Somit ergiebt sich:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^{j+1} \left(\frac{\beta_0}{n+j} + \frac{\beta_2}{n+j-2} + \frac{\beta_4}{n+j-4} + \cdots + \frac{\beta_{n-1}}{j+1} \right), \tag{8.}$$

oder, falls man Alles auf gleichen Nenner bringt:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^{j+1} \frac{B_0 j^{\frac{n-1}{2}} + B_1 j^{\frac{n-3}{2}} + B_2 j^{\frac{n-5}{2}} + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}}{(j+1)(j+3)(j+5)\cdots(j+n)}, \tag{9.}$$

wo die B, ebenso wie die β, unabhängig von j sind. Hieraus aber folgt, weil $\mathfrak{L}$ für $j = 2, 4, 6, \cdots (n-1)$ verschwinden muss, sofort:

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^{j+1} B_0 \frac{(j-2)(j-4)(j-6)\cdots(j-n+1)}{(j+1)(j+3)(j+5)\cdots(j+n)} \,. \tag{10.}$$

Um den nur von n abhängenden Factor B_0 zu ermitteln, betrachten wir wiederum den Specialfall: $j = \infty$. In diesem Fall ist nach (8.):

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^{j+1} \frac{1}{n+j} (\beta_0 + \beta_2 + \beta_4 + \cdots + \beta_{n-1}), \qquad (\text{für } j = \infty),$$

also mit Rücksicht auf (7.):

$$\mathfrak{L} = (\pm 1)^{j+1} \frac{1}{j} P_n(1) = (\pm 1)^{j+1} \frac{1}{j}, \qquad (\text{für } j = \infty).$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (10.) sofort, dass $B_0 = 1$ sein muss. Die Formel (10.) nimmt daher schliesslich, indem man für $\mathfrak{L}$ seine eigentliche Bedeutung (1.) substituirt, folgende Gestalt an:

$$\int_0^{\pm 1} z^{j-1} P_n(z) \, \partial z = (\pm 1)^{j+1} \frac{(j-2)(j-4)(j-6)\cdots(j-n+1)}{(j+1)(j+3)(j+5)\cdots(j+n)}; \qquad (n \text{ ungerade}). \tag{11.}$$

Die rechte Seite dieser Formel hat, wie man durch directe Berechnung findet, für $n = 1$ den Werth $(\pm 1)^{j+1} \frac{1}{j+1}$, und für $n = 3$ den Werth: $(\pm 1)^{j+1} \frac{j-2}{(j+1)(j+3)}$.

§ 14.ᵃ

Weitere Hülfsformeln.

Aus (34.), Seite 32, folgt, wenn man $x = 0$ macht:

$$(12.)\qquad \int_\infty^{\pm 1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^{j+1}} = (-1)^{n+j+1} \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-2)\cdots(j-n)} \int_0^{\mp 1} z^{j-1} P_n(z)\,\partial z\,,$$

vorausgesetzt, dass $j > n$ und $j > 0$ ist. Und hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (6.) und (11.) folgende Formeln:

(vorausgesetzt $j > n$ und $j > 0$)

$$(13.)\qquad \int_\infty^{\pm 1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^{j+1}} = (-1)(\pm 1)^j \frac{(j+1)(j+3)(j+5)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)(j-4)\cdots(j-n)}\,, \qquad \text{falls } n \text{ gerade,}$$

$$(14.)\qquad = (-1)(\pm 1)^{j+1} \frac{(j+2)(j+4)(j+6)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)(j-5)\cdots(j-n)}\,, \qquad \text{falls } n \text{ ungerade.}$$

Was ferner die Werthe dieses Integrals für die Specialfälle $n = 0, 2$ und $n = 1, 3$ betrifft, so findet man durch directe Rechnung

für $n = 0$ den Werth: $(-1)(\pm 1)^j \frac{1}{j}$, für $n = 2$ den Werth: $(-1)(\pm 1)^j \frac{j+1}{j(j-2)}$,

für $n = 1$ den Werth: $(-1)(\pm 1)^{j+1} \frac{1}{j-1}$, für $n = 3$ den Werth: $(-1)(\pm 1)^{j+1} \frac{j+2}{(j-1)(j-3)}$.

§ 15.

Entwicklung der Function $S_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, falls $j > n$.

Nach (8.ᵃ), (6), Seite 27, ist:

$$S_{nj}(x) = (-1)^j (1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}\,, \qquad (j > n),$$

d. i.

$$S_{nj}(x) = (-1)(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_\infty^{1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^{j+1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{j+1}}\,. \qquad (j > n).$$

Entwickelt man das unter dem Integralzeichen enthaltene Binom nach Potenzen von $\frac{x}{z}$, und setzt zur Abkürzung:

$$(15.)\qquad \int_\infty^{1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^q} = G_q\,,$$

so folgt: (immer vorausgesetzt: $j > n$)

$$(16.)\quad S_{nj}(x) = (-1)(1\cdot 2\cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\left(G_{j+1} + G_{j+2}\frac{j+1}{1}x + G_{j+3}\frac{(j+1)(j+2)}{1.2}x^2 + \cdots\right).$$

Bei Bestimmung der Integralwerthe G ist nun nach (13.), (14.) zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist.

Erster Fall: $n = gerade$. Alsdann ist nach (13.):

$$(17.)\quad G_{j+1} = (-1)\frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)},$$

$$(18.)\quad G_{j+2} = (-1)\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j+1)(j-1)\cdots(j-n+1)};$$

woraus sofort die recurrenten Relationen entspringen:

$$(19.)\quad G_{j+3} = \frac{(j+n+1)(j-n)}{(j+1)(j+2)}G_{j+1},$$

$$(20.)\quad G_{j+4} = \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{(j+2)(j+3)}G_{j+2}.$$

Mittelst (19.) können wir die (16.) enthaltenen Coefficienten:

$$G_{j+1},\quad G_{j+3},\quad G_{j+5},\ \cdots$$

durch den ersten G_{j+1} ausdrücken, dessen Werth in (17.) angegeben ist. Desgleichen können wir mittelst (20.) die in (16.) enthaltenen Coefficienten

$$G_{j+2},\quad G_{j+4},\quad G_{j+6},\ \cdots$$

wiederum auf den ersten derselben: G_{j+2} reduciren, dessen Werth in (18.) notirt ist. In solcher Weise folgt aus (16.):

(vorausgesetzt $j > n$ und n gerade)

$$(21.)\quad \frac{S_{nj}(x)}{(1\cdot 2\cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} =$$

$$= \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-n)(j-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots\right)$$
$$+ \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots\right),$$

wo die Factoren der oberen und unteren Reihe für $n = 0$ respective $\frac{1}{j}$ und 1 werden.

Zweiter Fall: $n = ungerade$. Alsdann ist nach (14.):

$$(22.)\quad G_{j+1} = (-1)\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)},$$

$$(23.)\quad G_{j+2} = (-1)\frac{(j+3)(j+5)\cdots(j+n)}{j(j-2)\cdots(j-n+1)};$$

woraus die recurrenten Relationen entspringen:

$$G_{j+3} = \frac{(j+n+1)(j-n)}{(j+1)(j+2)} G_{j+1}, \tag{24.}$$

$$G_{j+4} = \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{(j+2)(j+3)} G_{j+2}; \tag{25.}$$

mit Hülfe dieser Formeln (22.), (23.), (24.), (25.) nimmt die Formel (16.) folgende Gestalt an:

(vorausgesetzt $j > n$ und n ungerade)

$$\frac{S_{nj}(x)}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{26.}$$

$$= \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-n)(j-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots\right)$$

$$+ \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n)}{j(j-2)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots\right),$$

wo die Factoren der oberen und unteren Reihe für $n = 1$ respective gleich $\frac{1}{j-1}$ und $\frac{j+1}{j}$ werden.

§ 15.[a]

Entwicklung der Function $T_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, falls $j > n$.

Nach (8.[b]), (6.), Seite 27, ist:

$$T_{nj}(x) = (-1)^j (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad (j > n),$$

d. i.

$$T_{nj}(x) = (-1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^{j+1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{j+1}} \qquad (j > n).$$

Entwickelt man das unter dem Integralzeichen stehende Binom nach Potenzen von $\frac{x}{z}$, und setzt zur Abkürzung:

$$\int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{z^q} = H_q, \tag{27.}$$

so folgt (immer vorausgesetzt: $j > n$)

$$T_{nj}(x) = (-1)(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\left(H_{j+1} + H_{j+2}\frac{j+1}{1} x + H_{j+3}\frac{(j+1)(j+2)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots\right). \tag{28.}$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Formel sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: $n =$ *gerade.* Alsdann wird nach (13.):

$$H_{j+1} = (-1)^{j+1} \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}, \tag{29.}$$

$$H_{j+2} = (-1)^{j+2} \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j+1)(j-1)\cdots(j-n+1)}; \tag{30.}$$

woraus die recurrenten Relationen entspringen:

$$H_{j+3} = \frac{(j+n+1)(j-n)}{(j+1)(j+2)} H_{j+1}, \tag{31.}$$

$$H_{j+4} = \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{(j+2)(j+3)} H_{j+2}. \tag{32.}$$

Mittelst dieser recurrenten Relationen lassen sich sämmtliche Coefficienten H der Formel (28.) durch die beiden ersten ausdrücken, deren Werthe in (29.), (30.) angegeben sind; wodurch jene Formel folgende Gestalt gewinnt:

(vorausgesetzt $j > n$ und n gerade)

$$\frac{(-1)^j T_{nj}(x)}{(1\cdot 2\cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{33.}$$

$$= \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-n)(j-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots\right)$$

$$- \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots\right).$$

Zweiter Fall: $n =$ *ungerade.* Alsdann ist nach (14.):

$$H_{j+1} = (-1)^{j} \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}, \tag{34.}$$

$$H_{j+2} = (-1)^{j+1} \frac{(j+3)(j+5)\cdots(j+n)}{j(j-2)\cdots(j-n+1)}; \tag{35.}$$

woraus dieselben recurrenten Relationen entspringen, wie in (31.), (32.). Mittelst dieser Relationen nimmt die Formel (28.) folgende Gestalt an:

(vorausgesetzt $j > n$ und n ungerade)

$$\frac{(-1)^{j+1} T_{nj}(x)}{(1\cdot 2\cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{36.}$$

$$= \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-n)(j-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots\right)$$

$$- \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n)}{j(j-2)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots\right).$$

Bemerkung. — Die beiden letzten Entwicklungen (33.), (36.) können leicht aus den früheren Entwicklungen (21.), (26.) abgeleitet werden vermittelst des auf Seite 27 gefundenen Satzes:

$$T_{nj}(x) = (-1)^{j+n} S_{nj}(-x), \qquad (j > n). \tag{37.}$$

§ 15.[b]

Entwicklung der Function $Q_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, falls $j > n$.

Nach (10.), Seite 27, ist:

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - (-1)^{j+n} S_{nj}(-x), \qquad (j > n). \tag{38.}$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Formel sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: $j + n =$ *gerade.* Alsdann erhält man:

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) - S_{nj}(-x),$$

und hieraus durch Anwendung der Formeln (21.), (26.):

falls n und j beide gerade sind, und $j > n$ ist:

$$\frac{Q_{nj}(x)}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{39.}$$
$$= 2\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots\right),$$

und andererseits, falls n und j beide ungerade sind, und $j > n$ ist:

$$\frac{Q_{nj}(x)}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{40.}$$
$$= 2\frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n)}{j(j-2)\cdots(j-n+1)}\left(x + \frac{(j+n+2)(j-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{(j+n+2)(j+n+4)(j-n+1)(j-n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots\right).$$

Die rechten Seiten dieser Formeln (39.), (40.) unterscheiden sich, wie man sieht, nur durch die vorgesetzten Zahlenfactoren, während die Reihen dieselben sind.

Zweiter Fall: $j + n =$ *ungerade.* In diesem Fall erhält man aus (38.):

$$Q_{nj}(x) = S_{nj}(x) + S_{nj}(-x), \tag{41.}$$

und hieraus durch Anwendung der Formeln (21.), (26.):

falls n gerade, j ungerade, und $j > n$ ist:

$$\frac{Q_{nj}(x)}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{42.}$$
$$= 2\frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-1)(j-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots\right),$$

und andererseits, falls n ungerade, j gerade, und $j > n$ ist:

$$\frac{Q_{nj}(x)}{(1 \cdot 2 \cdots j)(1-x^2)^{\frac{j}{2}}} = \tag{43.}$$
$$= 2\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}\left(1 + \frac{(j+n+1)(j-n)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(j+n+1)(j+n+3)(j-n)(j-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots\right).$$

Die rechten Seiten der Formeln (42.), (43.) unterscheiden sich wiederum nur durch die vorgesetzten Zahlenfactoren, während die Reihen dieselben sind.

Bemerkung. Bezeichnet man in den Reihen (39.), (40.), (42.), (43.) irgend zwei aufeinanderfolgende Glieder mit

$$Ax^{p-2} + Bx^p ,$$

so ist

$$\frac{Bx^p}{Ax^{p-2}} = \frac{\left(\frac{j+n-1}{p}+1\right)\left(\frac{j-n-2}{p}+1\right)}{1-\frac{1}{p}} x^2 ,$$

also $= x^2$, falls p sehr gross ist. Hieraus folgt, dass all' diese Reihen convergent sind für $x < 1$, oder genauer für $x^2 < 1$.

§ 16.

Bemerkungen über die Functionen $Q_n(x)$, $Q_{nj}(x)$.

Während im Vorhergehenden $Q_{nj}(x)$ für $j > n$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt wurde, soll nun im Folgenden eine solche Entwicklung für $j \leqq n$ bewerkstelligt werden. Zu diesem Zweck mögen hier zunächst einige vorläufige Bemerkungen Platz finden.

Nach der Definition von $Q_n(x)$ ist:

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{x-z} = R_n(x) - P_n(x) \log \frac{x-1}{x+1} ,$$

oder, was dasselbe:

$$Q_n(x) = \left\{ R_n(x) - P_n(x) \log \frac{1-x}{1+x} \right\} - \left\{ P_n(x) \log(-1) \right\} , \tag{1.}$$

wo die beiden Glieder rechter Hand { } und { } für $x^2 < 1$ respective *reell* und *rein imaginär* sind*). Diese complexe Beschaffenheit von $Q_n(x)$ überträgt sich durch Differentiation auf $Q_{nj}(x)$, so lange $j \leqq n$, hört aber auf, sobald $j > n$ wird**).

Für $x^2 < 1$ sind also die Functionen $Q_{nj}(x)$ complexe Grössen, so lange $j \leqq n$, hingegen reelle Grössen, sobald $j > n$ wird. Die Voraussetzung $x^2 < 1$

---

*) Denn es ist $\log(-1) = (2p+1)\pi i$, wo p eine unbestimmte ganze Zahl und $i = \sqrt{-1}$ ist.

**) Denn für $j > n$ verschwindet der Differentialquotient $\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}$.

ist aber diejenige, welche im Folgenden bei der Entwicklung von $Q_{n,j}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, *der Convergenz willen*, beständig festzuhalten ist.

Aus (1.) folgt durch Differentiation:

$$Q'_n(x) = R'_n(x) + \frac{2P_n(x)}{1-x^2} - P'_n(x)\log\frac{1-x}{1+x} - P'_n(x)\log(-1). \tag{2.}$$

Weiter folgt aus (1.), (2.) für $x=0$:

$$Q_n(0) = R_n(0) - P_n(0)\log(-1), \tag{3.}$$

$$Q'_n(0) = R'_n(0) + 2P_n(0) - P'_n(0)\log(-1); \tag{4.}$$

und diese Formeln (3.), (4.) gewinnen, je nachdem n gerade oder ungerade ist, folgende speciellere Gestalten*).

Für ein gerades n:

$$(5.)\quad \begin{cases} Q_n(0) = -P_n(0)\log(-1), \\ Q'_n(0) = R'_n(0) + 2P_n(0), \quad \text{wo bekanntlich:}\ P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}, \end{cases}$$

andererseits für ein ungerades n:

$$(6.)\quad \begin{cases} Q_n(0) = R_n(0), \\ Q'_n(0) = -P'_n(0)\log(-1), \quad \text{wo bekanntlich:}\ P'_n(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}. \end{cases}$$

§ 16.[a]

Entwicklung der Function $Q_n(x)$ nach steigenden Potenzen von x.

Aus der bekannten Differentialgleichung:

$$(1-x^2)Q''_n(x) - 2xQ'_n(x) + n(n+1)Q_n(x) = 0 \tag{7.}$$

folgt durch $(j-2)$-malige Differentiation:

$$(1-x^2)Q_n^{(j)}(x) - 2(j-1)xQ_n^{(j-1)}(x) + (n-j+2)(n+j-1)Q_n^{(j-2)}(x) = 0; \tag{8.}$$

und aus diesen Gleichungen (7.), (8.) entspringen die Formeln:

$$(9.)\quad \begin{aligned} &Q''_n(0) = -n(n+1)Q_n(0), && Q'''_n(0) = -(n-1)(n+2)Q'_n(0), \\ &Q_n^{(4)}(0) = +(n-2)n(n+1)(n+3)Q_n(0), && Q_n^{(5)}(0) = +(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)Q'_n(0), \\ &Q_n^{(6)}(0) = -(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)Q_n(0), && Q_n^{(7)}(0) = -(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)Q'_n(0), \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} && \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

*) Es ist nämlich zu beachten, dass $R_n(x)$ nur *ungerade* Potenzen von x enthält, falls n *gerade*, und umgekehrt nur *gerade* Potenzen enthält, falls n *ungerade* ist.

vermittelst deren sämmtliche Grössen

$$Q_n(0), \quad Q'_n(0), \quad Q''_n(0), \quad Q'''_n(0), \quad Q^{(4)}_n(0), \ldots$$

auf die *beiden ersten* reducirt sind. — Entwickelt man nun $Q_n(x)$ nach dem *Taylor*'schen Satz, so ergiebt sich mit Hülfe der Formeln (9.) sofort:

$$Q_n(x) = Q_n(0) \cdot \mathfrak{K} + Q'_n(0) \cdot \mathfrak{S}, \tag{10.}$$

wo $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ folgende Reihen bezeichnen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} &= 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \ldots, \\ \mathfrak{S} &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \ldots \end{aligned} \tag{10.a}$$

In genau derselben Weise kann offenbar jedes andere particulare Integral der Gleichung (7.), z. B. $P_n(x)$ behandelt werden. Somit folgt:

$$P_n(x) = P_n(0) \cdot \mathfrak{K} + P'_n(0) \cdot \mathfrak{S}, \tag{11.}$$

wo $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ *dieselben* Reihen sind, wie in (10.a).

Es handelt sich nun nur noch um die Berechnung der in (10.) *enthaltenen Constanten* $Q_n(0)$ *und* $Q'_n(0)$. Zu diesem Zweck unterscheiden wir zwei Fälle.

Erster Fall: $n =$ *gerade.* Alsdann ist nach (10.), (11.):

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= Q_n(0) \cdot \mathfrak{K} + Q'_n(0) \cdot \mathfrak{S}, \\ P_n(x) &= P_n(0) \cdot \mathfrak{K}, \end{aligned} \tag{12.}$$

oder, falls man $\mathfrak{K}$ eliminirt:

$$Q_n(x) = Q'_n(0) \cdot \mathfrak{S} + \frac{Q_n(0)}{P_n(0)} P_n(x), \tag{12.a}$$

oder, falls man j-mal nach x differenzirt, und dabei $j > n$ voraussetzt:

$$Q^{(j)}_n(x) = Q'_n(0) \cdot \mathfrak{S}^{(j)}, \qquad (n \text{ gerade und } j > n). \tag{13.}$$

Dieser Werth von $Q^{(j)}_n(x)$ muss identisch sein mit demjenigen, welcher durch die Formeln (39.), (42.), Seite 47, dargeboten ist. Und die Vergleichung dieser beiden Werthe muss also nothwendig zur Kenntniss der in (13.) enthaltenen Constanten $Q'_n(0)$ uns hinführen.

Das allgemeine Glied der Reihe $\mathfrak{S}$ (10.a) lautet:

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{[(n-q+2)(n-q+4)\cdots(n-1)][(n+2)(n+4)\cdots(n+q-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} x^q,$$

wo q ungerade. Ist nun j eine *gerade Zahl,* so wird dasjenige erste Glied der Reihe $\mathfrak{S}$, welches bei j-maliger Differentiation nicht fortfällt, bestimmt durch $q = j + 1$. Folglich lautet das erste Glied der Reihe $\mathfrak{S}^{(j)}$:

$$(-1)^{\frac{j}{2}}\,[(n-j+1)(n-j+3)\cdots(n-1)]\,[(n+2)(n+4)\cdots(n+j)]\,x\,.$$

Aus diesem ersten Gliede erhält man aber, wie leicht zu übersehen, die folgenden Glieder der Reihe $\mathfrak{S}^{(j)}$ dadurch, dass man respective mit

$$-\frac{(n-j-1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^2\,,$$

$$+\frac{[(n-j-3)(n-j-1)]\,[(n+j+2)(n+j+4)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,x^4\,,$$

etc. etc.

multiplicirt. Somit folgt aus (13.)

falls n und j beide gerade sind, und $j > n$ ist:

$$(14.)\quad Q_n^{(j)}(x) = Q_n'(0)\cdot(-1)^{\frac{j}{2}}\,[(n-j+1)(n-j+3)\cdots(n-1)]\,[(n+2)(n+4)\cdots(n+j)]\times$$
$$\times\left(x+\frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3+\frac{(j-n+3)(j-n+1)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,x^5+\cdots\right).$$

Ist andererseits j eine *ungerade Zahl,* so wird das erste Glied der Reihe $\mathfrak{S}$, welches bei j-maliger Differentiation nicht verschwindet, bestimmt durch $q = j$; und also das erste Glied der Reihe $\mathfrak{S}^{(j)}$ lauten:

$$(-1)^{\frac{j-1}{2}}\,[(n-j+2)(n-j+4)\cdots(n-1)]\,[(n+2)(n+4)\cdots(n+j-1)]\,.$$

Aus diesem aber entstehen die folgenden Glieder der Reihe $\mathfrak{S}^{(j)}$ durch Multiplication mit

$$-\frac{(n-j)(n+j+1)}{1\cdot 2}\,x^2\,,$$

$$+\frac{[(n-j-2)(n-j)]\,[(n+j+1)(n+j+3)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^4\,,$$

etc. etc.

Somit folgt aus (13.)

falls n gerade, j ungerade und $j > n$ ist:

$$(15.)\quad Q_n^{(j)}(x) = Q_n'(0)\cdot(-1)^{\frac{j-1}{2}}\,[(n-j+2)(n-j+4)\cdots(n-1)]\,[(n+2)(n+4)\cdots(n+j-1)]\times$$
$$\times\left(1+\frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot 2}\,x^2+\frac{(j-n+2)(j-n)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^4+\cdots\right).$$

Aus der Vergleichung von (14.) mit der früheren Formel (39.), Seite 47 folgt sofort:

(n und j beide gerade und $j > n$)

$$Q_n'(0)\cdot(-1)^{\frac{j}{2}}\underbrace{[(n-j+1)(n-j+3)\cdots(n-1)]}_{f}\,[(n+2)(n+4)\cdots(n+j)] = 2(1\cdot 2\cdots j)\,\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n+1)}\,.$$

Durch diese Gleichung wird der Zahlenwerth von $Q'_n(0)$ bestimmt. Derselbe muss seiner Natur nach unabhängig von j sein; was in vollem Einklang steht mit der vorliegenden Gleichung. Beachtet man nämlich, dass n und j gerade sind, und $j > n$ ist, so kann man den in jener Gleichung mit f bezeichneten Factor auch so schreiben:

$$f = (n - j + 1)(n - j + 3) \cdots (-3)(-1)(1)(3)(5) \cdots (n - 1),$$

oder auch so:

$$f = (-1)^{\frac{j-n}{2}} [(j - n - 1)(j - n - 3) \cdots 3 \cdot 1][1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n - 1)].$$

Substituirt man aber diesen Werth von f, so folgt nach leichten Reductionen:

$$(16.) \qquad Q'_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2 \, \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}, \qquad (n \text{ gerade}).$$

Genau derselbe Werth von $Q'_n(0)$ ergiebt sich, wie *a priori* zu erwarten, aus der Vergleichung von (15.) mit der früheren Formel (42.), Seite 47. — Ferner ist nach (5.):

$$(17.) \qquad Q_n(0) = -P_n(0) \log(-1) = -(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \log(-1), \qquad (n \text{ gerade}).$$

Durch Substitution dieser Werthe (16.), (17.) in die erste der Formeln (12.) erhält man schliesslich:

$$(18.) \qquad Q_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \left\{ 2 \, \frac{2 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdots (n-1)} \mathfrak{S} - \lambda \, \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \mathfrak{R} \right\}, \qquad (n \text{ gerade}),$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ die in (10.ª) aufgeführten Reihen vorstellen, und $\lambda = \log(-1)$ ist.

Zweiter Fall: $n =$ *ungerade*. In diesem Falle wird nach (10.), (11.):

$$(19.) \qquad \begin{aligned} Q_n(x) &= Q_n(0) \cdot \mathfrak{R} + Q'_n(0) \cdot \mathfrak{S}, \\ P_n(x) &= P'_n(0) \cdot \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

oder, falls man $\mathfrak{S}$ eliminirt:

$$(19.^a) \qquad Q_n(x) = Q_n(0) \cdot \mathfrak{R} + \frac{Q'_n(0)}{P'_n(0)} P_n(x),$$

oder, falls man j-mal nach x differenzirt, und $j > n$ voraussetzt:

$$(20.) \qquad Q_n^{(j)}(x) = Q_n(0) \cdot \mathfrak{R}^{(j)}, \qquad (n \text{ ungerade und } j > n).$$

Dieser Werth von $Q_n^{(j)}(x)$ muss identisch sein mit demjenigen, welcher durch die Formeln (40.), (43.), Seite 47, dargeboten ist. Und durch eine solche Vergleichung müssen wir zur Kenntniss der Constanten $Q_n(0)$ gelangen können.

Das allgemeine Glied der Reihe $\mathfrak{K}$ (10.ª) lautet:

$$(-1)^{\frac{q}{2}} \frac{[(n-q+2)(n-q+4)\cdots n][(n+1)(n+3)\cdots(n+q-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q} x^q,$$

wo q gerade. Ist nun j eine *gerade Zahl,* so wird das erste Glied der Reihe $\mathfrak{K}$, welches bei j-maliger Differentiation nicht verschwindet, durch $q=j$ bestimmt. Folglich wird das erste Glied der Reihe $\mathfrak{K}^{(j)}$ lauten:

$$(-1)^{\frac{j}{2}} [(n-j+2)(n-j+4)\cdots n][(n+1)(n+3)\cdots(n+j-1)].$$

Aus diesem Gliede aber entstehen die folgenden Glieder der Reihe $\mathfrak{K}^{(j)}$ durch Multiplication mit

$$-\frac{(n-j)(n+j+1)}{1\cdot 2} x^2,$$

$$+\frac{[(n-j-2)(n-j)][(n+j+1)(n+j+3)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^4,$$

etc. etc.

Somit folgt aus (20.)

falls n ungerade, j gerade und $j>n$ ist:

$$(21.)\quad Q_n^{(j)}(x) = Q_n(0)\cdot(-1)^{\frac{j}{2}} [(n-j+2)(n-j+4)\cdots n][(n+1)(n+3)\cdots(n+j-1)] \times$$
$$\times\left(1+\frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(j-n+2)(j-n)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\cdots\right).$$

Ist andererseits j eine *ungerade Zahl,* so ist das erste Glied der Reihe $\mathfrak{K}$, welches bei j-maliger Differentiation nicht verschwindet, das durch $q=j+1$ bestimmte; folglich lautet das erste Glied der Reihe $\mathfrak{K}^{(j)}$:

$$(-1)^{\frac{j+1}{2}} [(n-j+1)(n-j+3)\cdots n][(n+1)(n+3)\cdots(n+j)]\,x,$$

und aus diesem entstehen die folgenden Glieder der Reihe $\mathfrak{K}^{(j)}$ durch Multiplication mit

$$-\frac{(n-j-1)(n+j+2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^2,$$

$$+\frac{[(n-j-3)(n-j-1)][(n+j+2)(n+j+4)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^4,$$

etc. etc.

Somit folgt aus (20.)

falls n und j beide ungerade, und $j>n$ ist:

$$(22.)\quad Q_n^{(j)}(x) = Q_n(0)\cdot(-1)^{\frac{j+1}{2}} [(n-j+1)(n-j+3)\cdots n][(n+1)(n+3)\cdots(n+j)] \times$$
$$\times\left(x+\frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{(j-n+3)(j-n+1)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots\right).$$

Aus der Vergleichung dieser Formel (22.) mit der früher gefundenen Formel (40.), Seite 47, folgt sofort:

(n und j beide ungerade, und $j > n$)

$$Q_n(0)\cdot(-1)^{\frac{j+1}{2}}\underbrace{[(n-j+1)(n-j+3)\cdots n]}_{f}[(n+1)(n+3)\cdots(n+j)] = 2(1\cdot2\cdots j)\frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n)}{j(j-2)(j-4)\cdots(j-n+1)},$$

wo der Factor f auch so darstellbar ist:

$$f = (n-j+1)(n-j+3)\cdots(-3)(-1)(1)(3)(5)\cdots n,$$

oder auch so:

$$f = (-1)^{\frac{j-n}{2}}[(j-n-1)(j-n-3)\cdots 3\cdot 1][1\cdot 3\cdot 5\cdots n].$$

Substituirt man diesen Werth von f, so folgt nach leichter Reduction:

$$(23.)\qquad Q_n(0) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2\,\frac{2\cdot4\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdots n},\qquad (n \text{ ungerade}).$$

Zu demselben Werth für $Q_n(0)$ würde man auch gelangen durch Vergleichung der Formel (21.) mit der früheren Formel (43.), Seite 47. Ferner*) ergiebt sich aus (6.):

$$(24.)\qquad Q_n'(0) = -P_n'(0)\log(-1) = +(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1\cdot3\cdots n}{2\cdot4\cdots(n-1)}\log(-1),\qquad (n \text{ ungerade}).$$

Durch Substitution der Werthe (23.), (24.) in die erste der Formeln (19.) erhält man schliesslich:

$$(25.)\qquad Q_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left\{2\,\frac{2\cdot4\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdots n}\,\mathfrak{R} + \lambda\,\frac{1\cdot3\cdots n}{2\cdot4\cdots(n-1)}\,\mathfrak{S}\right\},\qquad (n \text{ ungerade}),$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ die Reihen (10.ª) bezeichnen, und $\lambda = \log(-1)$ ist.

Beiläufige Bemerkung. — Für ein gerades n ist**):

$$(26.^a)\qquad R_n(0) = 0,\qquad (n \text{ gerade}),$$

ferner nach (5.), und mit Rücksicht auf (16.):

$$R_n'(0) = Q_n'(0) - 2P_n(0),$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\left(\frac{2\cdot4\cdots n}{1\cdot3\cdots(n-1)} - \frac{1\cdot3\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdots n}\right),\qquad (n \text{ gerade}),$$

oder, was dasselbe:

$$(26.^b)\qquad R_n'(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\,\frac{(2\cdot4\cdots n)^2 - (1\cdot3\cdots(n-1))^2}{1\cdot2\cdot3\cdots n},\qquad (n \text{ gerade}).$$

---

*) Man hat, was die Anwendung der Formeln (6.) betrifft, zu beachten, dass

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = -(-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

ist.

**) Vergl. die Note Seite 49.

Andererseits ergiebt sich für ein ungerades n aus (6.) und (23.) die Formel:

$$R_n(0) = Q_n(0) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2\,\frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n}, \qquad (n \text{ ungerade}), \tag{27.a}$$

während gleichzeitig*):

$$R_n'(0) = 0, \qquad (n \text{ ungerade}). \tag{27.b}$$

Man kann nun die Function $R_n(x)$ vermittelst der für diese Function geltenden Differentialgleichung und mit Benützung der Formeln (26.[a, b]), (27.[a, b]) nach steigenden Potenzen von x entwickeln. Doch ergeben sich für die Coefficienten dieser Entwicklung complicirte Werthe.

§ 16.[b]

Entwicklung der Function $Q_{nj}(x)$ nach steigenden Potenzen von x, falls $j \leqq n$.

Erster Fall: $n = gerade$. Alsdann ist nach (18.), wenn man für $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ ihre eigentlichen Bedeutungen (10.[a]) substituirt:

(n gerade)

$$Q_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \times \tag{28.}$$

$$\times \begin{cases} 2\,\dfrac{2\cdot 4\cdots n}{1\cdot 3\cdots(n-1)}\left(x - \dfrac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \dfrac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,x^5 - \cdots\right) \\ -\lambda\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\left(1 - \dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \dfrac{(n-2)\,n\,(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^4 - \cdots\right) \end{cases},$$

wo $\lambda = \log(-1)$ ist. Insbesondere wird für $n = 0$:

$$Q_0(x) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) - \lambda. \tag{29.}$$

Sodann ergeben sich aus (28.) durch j-malige Differentiation folgende Formeln für $Q_n^{(j)}(x)$.

Falls n gerade, j ebenfalls gerade, und $j \leqq n$:

$$Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j}{2}} \times \tag{30.}$$

$$\times \begin{cases} 2\,\dfrac{2\cdot 4\cdots(n+j)}{1\cdot 3\cdots(n-j-1)}\left(x + \dfrac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \dfrac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,x^5 + \cdots\right) \\ -\lambda\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(n+j-1)}{2\cdot 4\cdots(n-j)}\left(1 + \dfrac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \dfrac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^4 + \cdots\right) \end{cases},$$

---

*) Vergl. wiederum die Note Seite 49.

andererseits, falls n gerade, j ungerade, und $j \leq n$:

$$(31.)\quad Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j-1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & 2\,\frac{2\cdot4\cdots(n+j-1)}{1\cdot3\cdots(n-j)}\left(1+\frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot2}x^2+\frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\right) \\ & +\lambda\,\frac{1\cdot3\cdots(n+j)}{2\cdot4\cdots(n-j-1)}\left(x+\frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5+\cdots\right) \end{aligned} \right\},$$

wo überall $\lambda = \log(-1)$ ist.

Zweiter Fall: $n = $ *ungerade.* Alsdann folgt aus (25.) mit Rücksicht auf (10.ª):

(n ungerade)

$$(32.)\quad Q_n(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & 2\,\frac{2\cdot4\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdots n}\left(1-\frac{n(n+1)}{1\cdot2}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4-\cdots\right) \\ & +\lambda\,\frac{1\cdot3\cdots n}{2\cdot4\cdots(n-1)}\left(x-\frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\cdots\right) \end{aligned} \right\},$$

wo wiederum $\lambda = \log(-1)$ ist. Insbesondere wird für $n = 1$:

$$(33.)\quad Q_1(x) = -2\left(1-\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{3}-\frac{x^6}{5}-\cdots\right)-\lambda x.$$

Weiter ergeben sich nun aus (32.) durch j-malige Differentiation folgende Formeln für $Q_n^{(j)}(x)$.

Falls n ungerade, j gerade, und $j \leq n$ ist:

$$(34.)\quad Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j+1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & 2\,\frac{2\cdot4\cdots(n+j-1)}{1\cdot3\cdots(n-j)}\left(1+\frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot2}x^2+\frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\right) \\ & +\lambda\,\frac{1\cdot3\cdots(n+j)}{2\cdot4\cdots(n-j-1)}\left(x+\frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5+\cdots\right) \end{aligned} \right\},$$

andererseits, falls n ungerade, j ebenfalls ungerade, und $j < n$ ist:

$$(35.)\quad Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & -2\,\frac{2\cdot4\cdots(n+j)}{1\cdot3\cdots(n-j-1)}\left(x+\frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5+\cdots\right) \\ & +\lambda\,\frac{1\cdot3\cdots(n+j-1)}{2\cdot4\cdots(n-j)}\left(1+\frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot2}x^2+\frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\right) \end{aligned} \right\},$$

wo überall $\lambda = \log(-1)$ ist.

§ 17.

Darstellung sämmtlicher Functionen $P_{nj}(x)$, $Q_{nj}(x)$, $S_{nj}(x)$, $T_{nj}(x)$ durch zwei Reihen $\mathfrak{K}_{nj}(x)$ und $\mathfrak{S}_{nj}(x)$.

Die Reihen $\mathfrak{K}_{nj}(x)$ und $\mathfrak{S}_{nj}(x)$, auf welche die genannten Functionen reducirt werden sollen, sind definirt durch die Formeln:

$$(36.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{K}_{nj}(x) &= 1 + \frac{(j-n)(j+n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots, \\ \mathfrak{S}_{nj}(x) &= x + \frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots; \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt:

$$(37.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{K}_n(x) = \mathfrak{K}_{n0}(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdots\cdots, \\ \mathfrak{S}_n(x) = \mathfrak{S}_{n0}(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots\cdots. \end{aligned}$$

Durch diese Reihen*) kann z. B. $P_n(x)$ folgendermassen ausgedrückt werden:

$$(38.)\quad \begin{aligned} P_n(x) &= (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\mathfrak{K}_n(x), &&\text{falls } n \text{ gerade}, \\ P_n(x) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}\mathfrak{S}_n(x), &&\text{falls } n \text{ ungerade}. \end{aligned}$$

Ferner erhält man für $P_n^{(j)}(x)$ d. i. $\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}$ folgende Formeln:

$$(39.)\quad \begin{aligned} P_n^{(j)}(x) &= (-1)^{\frac{n+j}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots(n+j-1)}{2\cdot 4\cdots(n-j)}\mathfrak{K}_{nj}(x), &&\text{falls } n \text{ gerade}, \ j \text{ gerade}, \ j \leq n, \\ P_n^{(j)}(x) &= (-1)^{\frac{n+j+1}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots(n+j)}{2\cdot 4\cdots(n-j-1)}\mathfrak{S}_{nj}(x), &&\text{falls } n \text{ gerade}, \ j \text{ ungerade}, \ j < n, \\ P_n^{(j)}(x) &= (-1)^{\frac{n+j-1}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots(n+j)}{2\cdot 4\cdots(n-j-1)}\mathfrak{S}_{nj}(x), &&\text{falls } n \text{ ungerade}, \ j \text{ gerade}, \ j < n, \\ P_n^{(j)}(x) &= (-1)^{\frac{n+j-2}{2}}\frac{1\cdot 3\cdots(n+j-1)}{2\cdot 4\cdots(n-j)}\mathfrak{K}_{nj}(x), &&\text{falls } n \text{ ungerade}, \ j \text{ ungerade}, \ j < n. \end{aligned}$$

Ferner gewinnen die Formeln (28.), (32.) durch Anwendung der Bezeichnungen $\mathfrak{K}_n(x)$, $\mathfrak{S}_n(x)$ folgendes Aussehen [vergl. auch (18.), (25.)]:

$$(40.)\quad \begin{aligned} Q_n(x) &= (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\left\{2\frac{2\cdot 4\cdots n}{1\cdot 3\cdots(n-1)}\mathfrak{S}_n(x) - \lambda\frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}\mathfrak{K}_n(x)\right\}, &&\text{falls } n \text{ gerade}, \\ Q_n(x) &= (-1)^{\frac{n+1}{2}}\left\{2\frac{2\cdot 4\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots n}\mathfrak{K}_n(x) + \lambda\frac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}\mathfrak{S}_n(x)\right\}, &&\text{falls } n \text{ ungerade}, \end{aligned}$$

wo $\lambda = \log(-1)$ ist.

) Welche, wie man sieht, identisch sind mit denjenigen, die in (10.) kurzweg mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet wurden.

Sodann gewinnen ferner die Formeln (30.), (31.) und (34.), (35.) folgende Gestalt:

$$
(41.)\quad
\begin{aligned}
&Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j}{2}} \times \\
&\qquad \times \left\{ 2\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdot(n+j)}{1\cdot 3\cdot\cdot(n-j-1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) - \lambda\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(n+j-1)}{2\cdot 4\cdot\cdot(n-j)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ ger., } j \text{ ger., } j \leqq n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j-1}{2}} \times \\
&\qquad \times \left\{ 2\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdot(n+j-1)}{1\cdot 3\cdot\cdot(n-j)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) + \lambda\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(n+j)}{2\cdot 4\cdot\cdot(n-j-1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ ger., } j \text{ unger., } j \leqq n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j+1}{2}} \times \\
&\qquad \times \left\{ 2\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdot(n+j-1)}{1\cdot 3\cdot\cdot(n-j)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) + \lambda\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(n+j)}{2\cdot 4\cdot\cdot(n-j-1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ unger., } j \text{ ger., } j \leqq n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = (-1)^{\frac{n+j}{1}} \times \\
&\qquad \times \left\{ -2\,\frac{2\cdot 4\cdot\cdot(n+j)}{1\cdot 3\cdot\cdot(n-j-1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) + \lambda\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(n+j-1)}{2\cdot 4\cdot\cdot(n-j)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ unger., } j \text{ unger., } j \leqq n,
\end{aligned}
$$

wo überall $\lambda = \log(-1)$ ist.

Ferner erhält man mit Rückblick auf die früher gefundenen Formeln (39.), (40.) und (42.), (43.), Seite 47:

$$
(42.)\quad
\begin{aligned}
&Q_n^{(j)}(x) = 2\,(1\cdot 2\cdot\cdot j)\,\frac{(j+2)(j+4)\cdot\cdot(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdot\cdot(j-n+1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x), && \text{falls } n \text{ ger., } j \text{ ger., und } j > n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = 2\,(1\cdot 2\cdot\cdot j)\,\frac{(j+1)(j+3)\cdot\cdot(j+n-1)}{j\,(j-2)\cdot\cdot(j-n)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x), && \text{falls } n \text{ ger., } j \text{ unger., und } j > n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = 2\,(1\cdot 2\cdot\cdot j)\,\frac{(j+2)(j+4)\cdot\cdot(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdot\cdot(j-n)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x), && \text{falls } n \text{ unger., } j \text{ ger., und } j > n, \\
&Q_n^{(j)}(x) = 2\,(1\cdot 2\cdot\cdot j)\,\frac{(j+1)(j+3)\cdot\cdot(j+n)}{j\,(j-2)\cdot\cdot(j-n+1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x), && \text{falls } n \text{ unger., } j \text{ unger., und } j > n.
\end{aligned}
$$

Ferner gewinnen die Formeln (21.), (26.), Seite 44, 45, folgendes Aussehen:

$$
(43.)\quad
\begin{aligned}
&S_{nj}(x) = (1\cdot 2\cdot\cdot j)\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times \\
&\qquad \times \left\{ \frac{(j+1)(j+3)\cdot\cdot(j+n-1)}{j\,(j-2)\cdot\cdot(j-n)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) + \frac{(j+2)(j+4)\cdot\cdot(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdot\cdot(j-n+1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ ger., und } j > n, \\
&S_{nj}(x) = (1\cdot 2\cdot\cdot j)\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times \\
&\qquad \times \left\{ \frac{(j+2)(j+4)\cdot\cdot(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdot\cdot(j-n)}\,\mathfrak{K}_{nj}(x) + \frac{(j+1)(j+3)\cdot\cdot(j+n)}{j(j-2)\cdot\cdot(j-n+1)}\,\mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ unger., und } j > n.
\end{aligned}
$$

Endlich erhält man für die Function $T_{nj}(x)$ aus den Formeln (33.), (36), Seite 46, folgende Darstellungen:

$$
(44.)\quad
\begin{cases}
(-1)^j\, T_{nj}(x) = (1\cdot 2\cdots j)\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times \\
\quad \times \left\{ \dfrac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j\,(j-2)\cdots(j-n)}\, \mathfrak{K}_{nj}(x) - \dfrac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n+1)}\, \mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ ger., und } j > n, \\
(-1)^{j+1}\, T_{nj}(x) = (1\cdot 2\cdots j)\,(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \times \\
\quad \times \left\{ \dfrac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}\, \mathfrak{K}_{nj}(x) - \dfrac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n)}{j\,(j-2)\cdots(j-n+1)}\, \mathfrak{S}_{nj}(x) \right\}, \text{ falls } n \text{ unger., und } j > n.
\end{cases}
$$

Schliesslich sei bemerkt, dass ich die Reihen (36.) mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet habe, um in solcher Weise an die Aehnlichkeit derselben mit der Cosinus- und Sinus-Reihe zu erinnern.

Anhang zur ersten Abtheilung.

Dieser Anhang enthält eine Uebersicht der *recurrenten Relationen* zwischen den particularen Integralen mit verschiedenem Index, welche der Differentialgleichung der *allgemeinen* Kugelfunctionen [(7.), Seite 2] genügen. Für die *einfachen* Kugelfunctionen P_n erhält man diese Relationen am Bequemsten mittelst der Formeln:

$$(\alpha.) \qquad P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}\,;$$

und aus den Relationen der P_n lassen sich die der Q_n, P_{nj}, Q_{nj}, S_{nj}, T_{nj} leicht ableiten.

Ausserdem werde ich in diesem Anhange (im letzten §) einige *Tafeln* geben für *besondere Werthe* der Kugelfunctionen und ihrer Abgeleiteten.

§ 1.

Recurrente Relationen für die P_n.

Aus den Formeln (α.) folgt durch Differentiation und Multiplication mit (x^2-1):

$$(\beta.) \qquad (x^2-1)\,P_n'(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \Big(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\Big)^{n-1}\Big((x^2-1)+x\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\Big)\,d\varphi\,,$$

$$(\gamma.) \qquad = -\frac{n+1}{\pi}\int_0^\pi \frac{((x^2-1)+x\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+2}}\,.$$

Hier lässt sich die rechte Seite in Formel (β.) durch P_n und P_{n-1}, und die in (γ.) durch P_n und P_{n+1} ausdrücken, auf Grund der Gleichungen (α.). In solcher Weise ergiebt sich:

$$(\text{A.}) \qquad (x^2-1)\,P_n' = n\,(x\,P_n - P_{n-1})\,,$$

$$(\text{B.}) \qquad (x^2-1)\,P_n' = -(n+1)\,(x\,P_n - P_{n+1})\,,$$

und hieraus durch Differentiation:

(C.) $$n P_n = x P'_n - P'_{n-1},$$

(D.) $$(n+1) P_n = -x P'_n + P'_{n+1},$$

wo zur Abkürzung P_n, P'_n für $P_n(x)$, $P'_n(x)$ steht. Aus den vier Gleichungen (A.), (B.), (C.), (D.) ergeben sich folgende *recurrente Relationen zweiter Ordnung:*

(I.) $$(2n+1) x P_n = n P_{n-1} + (n+1) P_{n+1},$$

(II.) $$(2n+1) P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1},$$

(III.) $$(2n+1) x P'_n = (n+1) P'_{n-1} + n P'_{n+1},$$

(IV.) $$(2n+1)(x^2-1) P'_n = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Die Gleichung (I.) ist die Differenz der Gleichungen (A.) und (B.); die Gleichungen (II.) und (III.) sind durch Elimination respective von P'_n und P_n aus (C.) und (D.) entstanden; und die Gleichung (IV.) durch Elimination von P_n aus (A.) und (B.).

Mittelst der Gleichung (I.) kann man P_n durch die vorhergehenden Functionen P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3}, $\cdots$ ausdrücken; und zwar erhält man, jenachdem n gerade oder ungerade ist, folgende Formeln.

Für ein gerades n:

(1.ᵃ) $$P_n = x\left\{\frac{2n-1}{2} P_{n-1} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{2n-5}{n-2} P_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\,\frac{2n-9}{n-4} P_{n-5} \cdots \right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3}{n(n-2)\cdots 4}\,\frac{3}{2} P_1\right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n},$$

andererseits für ein ungerades n:

(1.ᵇ) $$P_n = x\left\{\frac{2n-1}{n} P_{n-1} - \frac{n-1}{n}\,\frac{2n-5}{n-2} P_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\,\frac{2n-9}{n-4} P_{n-5} \cdots \right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} P_0\right\}.$$

Ebenso erhält man aus (II.)

für ein gerades n:

(2.ᵃ) $$P'_n = (2n-1) P_{n-1} + (2n-5) P_{n-3} + (2n-9) P_{n-5} \cdots + 7 P_3 + 3 P_1,$$

und für ein ungerades n:

(2.ᵇ) $$P'_n = (2n-1) P_{n-1} + (2n-5) P_{n-3} + (2n-9) P_{n-5} \cdots + 5 P_2 + P_0.$$

Ferner folgt aus (III.)

für ein gerades n:

$$(3.^a)\qquad P'_n = x\left\{\frac{2n-1}{n-1}P'_{n-1} - \frac{n}{n-1}\,\frac{2n-5}{n-3}P'_{n-3} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\,\frac{2n-9}{n-5}P'_{n-5}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{n(n-2)\cdots 4}{(n-1)(n-3)\cdots 3}\,\frac{3}{1}P'_1\right\},$$

und für ein ungerades n:

$$(3.^b)\qquad P'_n = x\left\{\frac{2n-1}{n-1}P'_{n-1} - \frac{n}{n-1}\,\frac{2n-5}{n-3}P'_{n-3} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\,\frac{2n-9}{n-5}P'_{n-5}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{n(n-2)\cdots 5}{(n-1)(n-3)\cdots 4}\,\frac{5}{2}P'_2\right\} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{3\cdot 5\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}.$$

Endlich folgt aus (IV.)

für ein gerades n:

$$(4.^a)\qquad P_n - 1 = (x^2-1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}P'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}P'_{n-3} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)}P'_{n-5}\cdots + \frac{3}{2\cdot 1}P'_1\right\},$$

und für ein ungerades n:

$$(4.^b)\qquad P_n - x = (x^2-1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}P'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}P'_{n-3} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)}P'_{n-5}\cdots + \frac{5}{3\cdot 2}P'_2\right\}.$$

Bemerkung. Aus den Gleichungen ($2.^{a,\,b}$) ergiebt sich mittelst wiederholter Differentiationen:

$$P''_n = [2n-1](2n-3)P_{n-2} + 2[2n-3](2n-7)P_{n-4} + 3[2n-5](2n-11)P_{n-6} + \cdots,$$
$$(5.)\qquad P'''_n = [(2n-1)(2n-3)](2n-5)P_{n-3} + 3[(2n-3)(2n-5)](2n-9)P_{n-5} +$$
$$+ 6[(2n-5)(2n-7)](2n-13)P_{n-7} + \cdots,$$
$$P''''_n = [(2n-1)(2n-3)(2n-5)](2n-7)P_{n-4} + 4[(2n-3)(2n-5)(2n-7)](2n-11)P_{n-6} +$$
$$+ 10[(2n-5)(2n-7)(2n-9)](2n-15)P_{n-8} + \cdots;$$

und allgemein:

$$(6.)\qquad P_n^{(j)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}[(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2j+3)](2n-2j+1)P_{n-j}$$
$$+ \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots j}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}[(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2j+1)](2n-2j-3)P_{n-j-2}$$
$$+ \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(j+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(j-1)}[(2n-5)(2n-7)\cdots(2n-2j-1)](2n-2j-7)P_{n-j-4}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dieser Ausdruck für $P_n^{(j)}$ bricht ab entweder mit P_0 oder mit P_1, jenachdem $(n-j)$ gerade oder ungerade ist. Giebt man daher z. B. dem für P''_n (5.) erhaltenen Ausdruck, was die Reihenfolge seiner einzelnen Glieder betrifft, die entgegengesetzte Anordnung, so ergiebt sich, falls n *gerade* ist:

$$P''_n = \frac{1}{2}\left\{n(n+1)P_0 + 5(n-2)(n+3)P_2 + 9(n-4)(n+5)P_4\cdots + (2n-3)2(2n-1)P_{n-2}\right\},$$

und falls n *ungerade* ist:

$$P_n'' = \frac{1}{2}\left\{3(n-1)(n+2)P_1 + 7(n-3)(n+4)P_3 + 11(n-5)(n+6)P_5 \cdots + (2n-3)\,2\,(2n-1)P_{n-2}\right\}.$$

Um eine solche entgegengesetzte Anordnung beim Ausdrucke $P_n^{(j)}$ (6.) hervorzubringen, sei zunächst bemerkt, dass das mit P_{n-j-p} behaftete allgemeine Glied jenes Ausdruckes lautet:

$$\frac{\frac{p+2}{2}\,\frac{p+3}{2}\cdots\left(j+\frac{p-2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots(j-1)}\left[(2n-p-1)(2n-p-3)\cdots(2n-2j-p+3)\right](2n-2j-2p+1)P_{n-j-p},$$

oder, einfacher geschrieben:

$$(7.)\qquad \frac{j(j+1)\cdots\left(j+\frac{p-2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\frac{p}{2}}\left[(2n-p-1)(2n-p-3)\cdots(2n-2j-p+3)\right](2n-2j-2p+1)P_{n-j-p},$$

wo p nur gerade Werthe besitzt, und wo dem *vor* der eckigen Klammer [] stehende Factor für $p=0$ der Werth 1 zuzuertheilen ist. Falls nun $(n-j)$ *gerade* ist, so ergeben sich die mit P_0, P_2, P_4, $\cdots$ behafteten Glieder des Ausdruckes (6.) dadurch, dass man in (7.) der Zahl p der Reihe nach die Werthe $n-j$, $n-j-2$, $n-j-4$, $\cdots$ zuertheilt. Somit folgt:

[vorausgesetzt: $(n-j)$ gerade]

$$(8.^a)\qquad \begin{aligned} P_n^{(j)} &= \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-2)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j)}\left[(n+j-1)(n+j-3)\cdots(n-j+3)\right]\cdot1\cdot P_0 \\ &+ \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-4)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j-2)}\left[(n+j+1)(n+j-1)\cdots(n-j+5)\right]\cdot5\cdot P_2 \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-k-2)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j-k)}\left[(n+j+k-1)(n+j+k-3)\cdots(n-j+k+3)\right](2k+1)P_k \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

Ist andererseits $(n-j)$ *ungerade*, so wird man die mit P_1, P_3, P_5, $\cdots$ behafteten Glieder des Ausdruckes (6.) dadurch erhalten, dass man der Zahl p in (7.) die Werthe $n-j-1$, $n-j-3$, $n-j-5$, $\cdots$ zuertheilt. Und man erhält daher:

[vorausgesetzt: $(n-j)$ ungerade]

$$(8.^b)\qquad \begin{aligned} P_n^{(j)} &= \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-3)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j-1)}\left[(n+j)(n+j-2)(n+j-4)\cdots(n-j+4)\right]\cdot3\cdot P_1 \\ &+ \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-5)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j-3)}\left[(n+j+2)(n+j)(n+j-2)\cdots(n-j+6)\right]\cdot7\cdot P_3 \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ \frac{j(j+1)\cdots\frac{1}{2}(j+n-k-2)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-j-k)}\left[(n+j+k-1)(n+j+k-3)\cdots(n-j+k+3)\right](2k+1)\cdot P_k \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

In ($8.^a$) wie in ($8.^b$) ist im *letzten* (d. i. in dem mit P_{n-j} behaftetem) Gliede dem *vor* der eckigen [] stehenden Factor der Werth 1 zuzuertheilen.

§ 2.

Recurrente Relationen für die Q_n.

Mittels der Formel [(3.), Seite 1]:

$$Q_n(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{\sigma - z} \tag{9.}$$

lassen sich aus den Formeln (A.); (B.), ⋯ (I.), (II.), ⋯ die entsprechenden recurrenten Relationen für die Q_n ableiten.

Aus (9.) folgt durch Differentiation:

$$Q_n'(\sigma) = -\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(\sigma - z)^2} = -\left[\frac{P_n(z)}{\sigma - z}\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{P_n'(z)\,\partial z}{\sigma - z}. \tag{10.}$$

Nun ist $P_n(1) = 1$, und $P_n(-1) = (-1)^n$; folglich wird der Ausdruck $\left[\frac{P_n(z)}{\sigma - z}\right]_{-1}^{+1}$, jenachdem n gerade oder ungerade ist, den Werth $\frac{2}{\sigma^2 - 1}$ oder den Werth $\frac{2\sigma}{\sigma^2 - 1}$ besitzen. Somit ergiebt sich aus (10.):

$$\Phi_n = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n'(z)\,\partial z}{\sigma - z} = \begin{cases} Q_n'(\sigma) + \frac{2}{\sigma^2 - 1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ Q_n'(\sigma) + \frac{2\sigma}{\sigma^2 - 1}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{11.}$$

Solches vorangeschickt, wenden wir uns zur Gleichung (A.) des vorhergehenden §. Diese lautet:

$$(z^2 - 1)\,P_n'(z) = nz\,P_n(z) - n\,P_{n-1}(z),$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

$$\left(\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma - z} - (\sigma + z)\right) P_n'(z) = n\left(\frac{\sigma}{\sigma - z} - 1\right) P_n(z) - \frac{n}{\sigma - z} P_{n-1}(z),$$

oder, falls man mit ∂z multiplicirt, und zwischen -1 und $+1$ integrirt, *und dabei voraussetzt* *), dass $n > 0$ (nicht $= 0$) sei:

$$(\sigma^2 - 1)\,\Phi_n - \int_{-1}^{+1} (\sigma + z)\,P_n'(z)\,\partial z = n\sigma\,Q_n(\sigma) - n\,Q_{n-1}(\sigma),$$

---

*) Demgemäss sind auch die sich schliesslich ergebenden Formeln (A.[b]), (B.[b]), etc. nur gültig für $n > 0$, hingegen ungültig für $n = 0$.

wo Φ_n das Integral (11.) repräsentirt. Addirt man zu dieser Gleichung die sich leicht ergebende (übrigens ebenfalls auf der Voraussetzung $n > 0$ beruhende) Formel:

$$\int_{-1}^{+1} (\sigma + z) P_n'(z) \partial z = \Big[(\sigma + z) P_n(z)\Big]_{-1}^{+1},$$

so folgt:

$$(\sigma^2 - 1)\,\Phi_n = \Big[(\sigma + z) P_n(z)\Big]_{-1}^{+1} + n\Big(\sigma Q_n(\sigma) - Q_{n-1}(\sigma)\Big),$$

wo das erste Glied rechter Hand, jenachdem n gerade oder ungerade ist, den Werth 2 oder 2σ besitzt. Somit folgt, falls man für Φ_n seine eigentliche Bedeutung (11.) substituirt:

$$(\text{A.}^b) \qquad (\sigma^2 - 1)\, Q_n'(\sigma) = n\Big(\sigma Q_n(\sigma) - Q_{n-1}(\sigma)\Big).$$

In derselben Weise leitet sich aus der Gleichung (B.) die Gleichung ab:

$$(\text{B.}^b) \qquad (\sigma^2 - 1)\, Q_n'(\sigma) = -(n+1)\Big(\sigma Q_n(\sigma) - Q_{n+1}(\sigma)\Big).$$

Durch Differentiation ergiebt sich hieraus:

$$(\text{C.}^b) \qquad n\, Q_n(\sigma) = \sigma Q_n'(\sigma) - Q_{n-1}'(\sigma),$$

$$(\text{D.}^b) \qquad (n+1)\, Q_n(\sigma) = -\sigma Q_n'(\sigma) + Q_{n+1}'(\sigma).$$

In derselben Weise, wie oben die Gleichungen (I.), (II.), ⋯ aus (A.), (B.), ⋯ abgeleitet wurden, leiten sich aus den vorstehenden Gleichungen (A.[b]), (B.[b]), ⋯ die folgenden recurrenten Relationen der Q_n ab:

$$(\text{I.}^b) \qquad (2n+1)\,\sigma Q_n = n\, Q_{n-1} + (n+1)\, Q_{n+1},$$

$$(\text{II.}^b) \qquad (2n+1)\, Q_n = Q_{n+1}' - Q_{n-1}',$$

$$(\text{III.}^b) \qquad (2n+1)\,\sigma Q_n' = (n+1)\, Q_{n-1}' + n\, Q_{n+1}',$$

$$(\text{IV.}^b) \qquad (2n+1)(\sigma^2 - 1)\, Q_n' = n(n+1)(Q_{n+1} - Q_{n-1}).$$

Diese Relationen gestatten, die Q_n und ihre Differentialquotienten durch die Q_n niederer Ordnung auszudrücken. So ergiebt sich z. B. aus (I.[b]),

falls n gerade ist:

$$(12.^a) \qquad Q_n = \sigma\left\{\frac{2n-1}{n} Q_{n-1} - \frac{n-1}{n}\,\frac{2n-5}{n-2} Q_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\,\frac{2n-9}{n-4} Q_{n-5} \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3}{n(n-2)\cdots 4}\,\frac{3}{2} Q_1\right\} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 2} Q_0,$$

und andererseits, wenn n ungerade ist:

$$(12.^b)\quad Q_n = \sigma\left\{\frac{2n-1}{n} Q_{n-1} - \frac{n-1}{n}\,\frac{2n-5}{n-2} Q_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\,\frac{2n-9}{n-4} Q_{n-5}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4}{n(n-2)\cdots 5}\,\frac{5}{3} Q_2\right\} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} Q_1 .$$

Dieselbe Gleichung (I.[b]) gestattet auch, Q_n durch eine unbegrenzte **Reihe** auszudrücken, welche nach steigenden Q_n fortschreitet. Diese Reihe lautet:

$$(13.)\quad Q_n = \sigma\left\{\frac{2n+3}{n+1} Q_{n+1} - \frac{n+2}{n+1}\,\frac{2n+7}{n+3} Q_{n+3} + \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\,\frac{2n+11}{n+5} Q_{n+5} - \cdots\right\} .$$

und convergirt immer, wenn das Argument σ resp. dessen Modul **grösser** als 1 ist.

Aus der Gleichung (II.[b]) folgt,

wenn n gerade ist:

$$(14.^a)\quad Q'_n - Q'_0 = (2n-1) Q_{n-1} + (2n-5) Q_{n-3} + (2n-9) Q_{n-5} \cdots + 3 Q_1 ,$$

und, falls n ungerade:

$$(14.^b)\quad Q'_n - Q'_1 = (2n-1) Q_{n-1} + (2n-5) Q_{n-3} + (2n-9) Q_{n-5} \cdots + 5 Q_2\, ^{*}) .$$

Aus (14.[a, b]) ergiebt sich für Q'_n eine unbegrenzte nach steigenden Q_n fortschreitende Reihe:

$$(15.)\quad Q'_n = -\Big((2n+3) Q_{n+1} + (2n+7) Q_{n+3} + (2n+11) Q_{n+5} + \cdots\Big),$$

welche für $\sigma > 1$ convergent ist.

Ferner erhält man aus der Gleichung (III.[b]),

$$(16.^a)\quad \text{wenn } n \text{ gerade:}\quad Q'_n - (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-2)\cdots 2}{(n-1)(n-3)\cdots 1} Q'_0 =$$
$$= \sigma\left\{\frac{2n-1}{n-1} Q'_{n-1} - \frac{n}{n-1}\,\frac{2n-5}{n-3} Q'_{n-3} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\,\frac{2n-9}{n-5} Q'_{n-5}\cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{n(n-2)\cdots 4}{(n-1)(n-3)\cdots 3}\,\frac{3}{1} Q'_1\right\},$$

$$(16.^b)\quad \text{und, falls } n \text{ ungerade:}\quad Q'_n - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-2)\cdots 3}{(n-1)(n-3)\cdots 2} Q'_1 =$$
$$= \sigma\left\{\frac{2n-1}{n-1} Q'_{n-1} - \frac{n}{n-1}\,\frac{2n-5}{n-3} Q'_{n-3} + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)}\,\frac{2n-9}{n-5} Q'_{n-5}\cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(n-2)\cdots 5}{(n-1)(n-3)\cdots 4}\,\frac{5}{2} Q'_2\right\}.$$

---

*) Die in (14.[a, b]) enthaltenen Functionen Q'_0, Q'_1 besitzen folgende Werthe:

$$Q'_0 = -\frac{2}{\sigma^2-1}, \qquad Q'_1 = Q_0 - \frac{2\sigma}{\sigma^2-1},$$

wie sich aus (6.), Seite 2, leicht ergiebt.

Aus derselben Gleichung ergiebt sich die nach den Q_n aufsteigende, unbegrenzte Reihe:

$$(17.) \quad Q'_n = \sigma \left\{ \frac{2n+3}{n+2} Q'_{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \frac{2n+7}{n+4} Q'_{n+3} + \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)} \frac{2n+11}{n+6} Q'_{n+5} - \cdots \right\}.$$

Ferner erhält man aus der Gleichung (IV.^{b}),

(18.^{a}) wenn n gerade ist: $Q_n - Q_0 =$

$$= (\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{2n-1}{n(n-1)} Q'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)} Q'_{n-3} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)} Q'_{n-5} \cdots + \frac{3}{2 \cdot 1} Q'_1 \right\},$$

(18.^{b}) und, falls n ungerade ist: $Q_n - Q_1 =$

$$= (\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{2n-1}{n(n-1)} Q'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)} Q'_{n-3} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)} Q'_{n-5} \cdots + \frac{5}{3 \cdot 2} Q'_2 \right\}.$$

Schliesslich ergiebt sich, ebenfalls aus (IV.^{b}), die nach den Q_n aufsteigende unbegrenzte Reihe:

$$(19.) \quad Q_n = -(\sigma^2 - 1) \left\{ \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} Q'_{n+1} + \frac{2n+7}{(n+3)(n+4)} Q'_{n+3} + \frac{2n+11}{(n+5)(n+6)} Q_{n+5} + \cdots \right\}.$$

Bemerkung. — Die für die Q erhaltenen acht Relationen (A.^{b}), (B.^{b}), (C.^{b}), (D.^{b}), (I.^{b}), (II.^{b}), (III.^{b}), (IV.^{b}) lassen sich, wie leicht zu constatiren, aus den früher für die P gefundenen Relationen (A.), (B.), (C.), (D.), (I.), (II.), (III.), (IV.) dadurch ableiten, dass man in diesen letztern n mit $-n$, sodann aber P_{-n} mit Q_{n-1} vertauscht. Demgemäss sind also jene Relationen der P, abgesehen vom Falle $n = 0$, gültig für alle Werthe von n von $-\infty$ bis $+\infty$, falls man nur festsetzt, dass P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, $\cdots$ als identisch betrachtet werden sollen respective mit Q_0, Q_1, Q_2, $\cdots$ Oder ein wenig anders ausgedrückt: *Die Relationen der P gelten auch für die Q, und umgekehrt die Relationen der Q auch für die P, falls man nur festsetzt, dass je zwei Functionen P_p und Q_q, deren Indices p und q die Summe -1 ergeben, als unter einander identisch betrachtet werden sollen.*

Diese Thatsache rührt keineswegs allein davon her, dass die P und Q particulare Integrale *derselben Differentialgleichung* sind, sondern beruht ausserdem wesentlich auch darauf, dass die diesen particularen Integralen vorgesetzten constanten Factoren *demselben Gesetz der Aufeinanderfolge* entsprechen. Bezeichnet man nämlich diese constanten Factoren für die Functionen P_n mit C_n, und andererseits für die Functionen P_{-n} oder Q_{n-1} mit D_{-n}, so lässt sich leicht zeigen, dass

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = F(n), \qquad \text{und} \qquad \frac{D_{-n}}{D_{-n-1}} = F(-n)$$

ist, wo in beiden Formeln F *eine und dieselbe* Function vorstellt*).

§ 3.

Recurrente Relationen für die R_n.

Jeder recurrenten Relation der Q_n entspricht eine recurrente Relation der R_n. Man erhält dieselbe dadurch, dass man in der erstern für die Q_n und Q'_n ihre Werthe substituirt:

$$(20.) \qquad \begin{aligned} Q_n &= R_n - P_n \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}, \qquad \text{[vergl. (3.), (4.), Seite 1.]} \\ Q'_n &= R'_n - P'_n \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1} - P_n \frac{2}{\sigma^2-1}, \end{aligned}$$

und dabei Rücksicht nimmt auf die Relationen der P_n. So z. B. folgt aus (A.[b]) durch Substitution der Werthe (20.):

$$(\sigma^2-1)\left(R'_n - P'_n \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1} - P_n\frac{2}{\sigma^2-1}\right) = n\left((\sigma R_n - R_{n-1}) - (\sigma P_n - P_{n-1})\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right),$$

oder, weil zufolge (A.) die mit dem log behafteten Glieder sich gegenseitig zerstören:

$$(\text{A.}^c) \qquad (\sigma^2-1) R'_n = \quad n(\sigma R_n - R_{n-1}) + 2P_n.$$

Ebenso ergiebt die Gleichung (B.[b]):

$$(\text{B.}^c) \qquad (\sigma^2-1) R'_n = -(n+1)(\sigma R_n - R_{n+1}) + 2P_n.$$

---

*) In der That ist [vergl. Seite 1 und 13]:

$$P_n(x) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\left[x^n + \mathfrak{g}x^{n-2} + \cdots\right],$$

$$P_{-n}(x) = Q_{n-1}(x) = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\left[x^{-n} + \mathfrak{g}'x^{-n-2} + \cdots\right],$$

wo $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ Constante sind. Demgemäss ist:

$$C_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots n}, \qquad \text{und} \qquad D_{-n} = 2\,\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}.$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{2n-1}{n}, \qquad \text{und} \qquad \frac{D_{-n}}{D_{-n-1}} = \frac{2n+1}{n} = \frac{2(-n)-1}{2(-n)};$$

w. z. z. w.

Differenzirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die für R_n geltende Differentialgleichung*)

$$\text{(C.}^c\text{)} \qquad n R_n = \sigma R'_n - R'_{n-1} - \frac{2}{n} P'_n,$$

$$\text{(D.}^c\text{)} \qquad (n+1) R_n = -\sigma R'_n + R'_{n+1} - \frac{2}{n+1} P'_n.$$

Aus diesen vier Gleichungen (A.^{c}), (B.^{c}), $\cdots$ leiten sich in derselben Weise, wie die Relationen (I.), (II.), $\cdots$ aus (A.), (B.), $\cdots$ abgeleitet wurden, die folgenden recurrenten Relationen der R_n ab:

$$\text{(I.}^c\text{)} \qquad (2n+1)\sigma R_n = n R_{n-1} + (n+1) R_{n+1},$$

$$\text{(II.}^c\text{)} \qquad (2n+1) R_n = R'_{n+1} - R'_{n-1} - \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} P'_n,$$

$$\text{(III.}^c\text{)} \qquad (2n+1)\sigma R'_n = (n+1) R'_{n-1} + n R'_{n+1} + \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} P'_n,$$

$$\text{(IV.}^c\text{)} \qquad (2n+1)(\sigma^2-1) R'_n = n(n+1)(R_{n+1} - R_{n-1}) + 2(2n+1) P_n.$$

Hieraus ergeben sich die nachfolgenden Formeln (21.$^{a, b}$), (22.$^{a, b}$) und (23.$^{a, b}$), falls man nur beachtet, dass $R_0 = 0$ und $R_1 = -2$ ist**). Zunächst findet man aus (I.^{c}),

(21.^{a}) falls n gerade ist:

$$R_n = \sigma \left\{ \frac{2n-1}{n} R_{n-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{n} \frac{2n-5}{n-2} R_{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \frac{2n-9}{n-4} \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3}{n(n-2)\cdots 4} \frac{3}{2} R_1 \right\},$$

(21.^{b}) und, falls n ungerade:

$$R_n = \sigma \left\{ \frac{2n-1}{n} R_{n-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{n} \frac{2n-5}{n-2} R_{n-3} + \cdots\cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4}{n(n-2)\cdots 5} \frac{5}{3} R_2 \right\}.$$

Sodann folgt aus (II.^{c}) mit Rücksicht auf (4.$^{a, b}$),

falls n gerade ist:

$$\text{(22.}^a\text{)} \quad R'_n = \frac{2(P_n-1)}{\sigma^2-1} + (2n-1) R_{n-1} + (2n-5) R_{n-3} + (2n-9) R_{n-5} \cdots + 3 R_1,$$

und, falls n ungerade:

$$\text{(22.}^b\text{)} \quad R'_n = \frac{2(P_n-\sigma)}{\sigma^2-1} + (2n-1) R_{n-1} + (2n-5) R_{n-3} + (2n-9) R_{n-5} \cdots + 5 R_2.$$

---

*) Diese Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\Big((\sigma^2-1) R'_n(\sigma)\Big) = n(n+1) R_n(\sigma) + 4 P'_n(\sigma);$$

wobei zu bemerken, dass die Formel (5.) auf Seite 2 mit einem Druckfehler behaftet ist. Denn an Stelle des dort auf der rechten Seite befindlichen Factors 4 ist zu substituiren (-4).

**) Dass $R_0 = 0$ und $R_1 = -2$ sei, erkennt man leicht aus dem allgemeinen Werthe von R_n. [Vergl. (6.), Seite 2.]

Endlich ergeben sich aus (IV.[c]) folgende zwei Formeln, in denen die Integrationsconstanten noch einer näheren Bestimmung bedürftig bleiben.

Vorausgesetzt, dass n gerade ist:

$$(23.^{a})\qquad R_n + 2\int \frac{P_n(\sigma) - 1}{\sigma^2 - 1}\,\partial\sigma = (\sigma^2 - 1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}R'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}R'_{n-3}\cdots + \frac{3}{2\cdot 1}R'_1\right\},$$

und andererseits, falls n ungerade ist:

$$(23.^{b})\qquad R_n + 2\int \frac{P_n(\sigma) - \sigma}{\sigma^2 - 1}\,\partial\sigma = (\sigma^2 - 1)\left\{\frac{2n-1}{n(n-1)}R'_{n-1} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)}R'_{n-3}\cdots + \frac{5}{3\cdot 2}R'_2\right\}.$$

Die scheinbar gebrochenen Functionen in (22.[a, b]) und (23.[a, b]) sind in Wirklichkeit *ganze* algebraische Functionen. Denn nach (4.[a, b]) hat $P_n(\sigma) - 1$, falls n gerade, den Factor $(\sigma^2 - 1)$; und ebenso ist $P_n(\sigma) - \sigma$ mit diesem Factor behaftet, falls n ungerade.

§ 4.

Beziehungen zwischen den P_n und Q_n.

Aus der Verbindung der in den vorhergehenden §§ entwickelten Formeln ergeben sich merkwürdige Beziehungen zwischen den P_n und Q_n. Verbindet man z. B. die Gleichungen (I.) und (I.[b]), d. i.

$$(2n+1)\,x\,P_n = n\,P_{n-1} + (n+1)\,P_{n+1},$$
$$(2n+1)\,x\,Q_n = n\,Q_{n-1} + (n+1)\,Q_{n+1},$$

so erhält man:

$$(\alpha.)\qquad (2n+1)\,x\,(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) = (n+1)\,(P_{n+1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n+1}),$$
$$(\beta.)\qquad n\,(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) = (n+1)\,(P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1}).$$

Verbindet man ferner miteinander die Gleichungen (III.), (III.[b]), d. i.

$$(2n+1)\,x\,P'_n = (n+1)\,P'_{n-1} + n\,P'_{n+1},$$
$$(2n+1)\,x\,Q'_n = (n+1)\,Q'_{n-1} + n\,Q'_{n+1},$$

so ergiebt sich:

$$(\gamma.)\qquad (2n+1)\,x\,(P'_n Q'_{n-1} - P'_{n-1} Q'_n) = n\,(P'_{n+1} Q'_{n-1} - P'_{n-1} Q'_{n+1}),$$
$$(\delta.)\qquad (n+1)\,(P'_n Q'_{n-1} - P'_{n-1} Q'_n) = n\,(P'_{n+1} Q'_n - P'_n Q'_{n+1}).$$

Aus (β.) folgt, falls man n der Reihe nach gleich 1, 2, 3, $\cdots$ $(n-2)$, $(n-1)$ werden lässt:

$$1\,(P_1 Q_0 - P_0 Q_1) = 2\,(P_2 Q_1 - P_1 Q_2),$$
$$2\,(P_2 Q_1 - P_1 Q_2) = 3\,(P_3 Q_2 - P_2 Q_3),$$
$$3\,(P_3 Q_2 - P_2 Q_3) = 4\,(P_4 Q_3 - P_3 Q_4),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)\,(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}) = n\,(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n),$$

und hieraus durch Multiplication:

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = n(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n),$$

oder, falls man für P_0, P_1, Q_0, Q_1 ihre Werthe*) substituirt:

$$(\varepsilon.) \qquad + \frac{2}{n} = P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n.$$

Ferner findet man aus (δ.), wenn man wiederum $n = 1, 2, 3, \cdots (n-1)$ werden lässt:

$$2(P_1' Q_0' - P_0' Q_1') = 1(P_2' Q_1' - P_1' Q_2'),$$
$$3(P_2' Q_1' - P_1' Q_2') = 2(P_3' Q_2' - P_2' Q_3'),$$
$$4(P_3' Q_2' - P_2' Q_3') = 3(P_4' Q_3' - P_3' Q_4'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n(P_{n-1}' Q_{n-2}' - P_{n-2}' Q_{n-1}') = (n-1)(P_n' Q_{n-1}' - P_{n-1}' Q_n'),$$

und hieraus durch Multiplication:

$$n(P_1' Q_0' - P_0' Q_1') = (P_n' Q_{n-1}' - P_{n-1}' Q_n'),$$

oder, falls man für P_0', P_1', Q_0', Q_1' ihre Werthe**) substituirt:

$$(\eta.) \qquad - \frac{2n}{x^2 - 1} = P_n' Q_{n-1}' - P_{n-1}' Q_n'.$$

Durch Substitution der Werthe (ε.), (η.) in (α.), (γ.) folgt:

$$(\alpha\alpha.) \qquad + \frac{2(2n+1)x}{n(n+1)} = P_{n+1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n+1},$$

$$(\gamma\gamma.) \qquad - \frac{2(2n+1)x}{x^2 - 1} = P_{n+1}' Q_{n-1}' - P_{n-1}' Q_{n+1}'.$$

Diese Formeln (ε.), (η.), ($\alpha\alpha$.), ($\gamma\gamma$.) führen nun in Verbindung mit den früheren Formeln (A.), (A.^{b}) und (B.), (B.^{b}) zu folgenden Relationen:

$$(\text{a.}) \qquad P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = \frac{2}{n+1}, \qquad \text{nach } (\varepsilon.).$$

$$(\text{b.}) \qquad P_{n+1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n+1} = \frac{2(2n+1)x}{n(n+1)}, \qquad \text{nach } (\alpha\alpha.).$$

$$(\text{c.}) \qquad P_n' Q_n - P_n Q_n' = \frac{2}{x^2 - 1}, \qquad \text{nach (A.), (A.}^b\text{) und } (\varepsilon.).$$

---

*) Diese sind [vergl. (6.), Seite 2] folgende:

$$P_0 = 1, \qquad Q_0 = -\log \frac{x-1}{x+1},$$

$$P_1 = x, \qquad Q_1 = -2 - x \log \frac{x-1}{x+1}.$$

**) Vergl. die vorhergehende Note.

(d.) $$P'_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q'_n = \frac{2x}{x^2-1}, \quad \text{nach (A.), (A.}^b\text{) und } (\varepsilon.).$$

(e.) $$P'_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q'_n = \frac{2x}{x^2-1}, \quad \text{nach (B.), (B.}^b\text{) und } (\varepsilon.).$$

(f.) $$P'_n Q'_{n+1} - P'_{n+1} Q'_n = \frac{2(n+1)}{x^2-1}, \quad \text{nach } (\eta.).$$

(g.) $$P'_{n-1} Q'_{n+1} - P'_{n+1} Q'_{n-1} = \frac{2(2n+1)x}{x^2-1}, \quad \text{nach } (\gamma\gamma.).$$

Aus der Formel (a.) erhält man für Q_n folgende eigenthümliche Entwicklung:

(24.) $$(Q_n - P_n Q_0) = -2P_n \left\{ \frac{1}{nP_nP_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)P_{n-1}P_{n-2}} + \frac{1}{(n-2)P_{n-2}P_{n-3}} \cdots + \frac{1}{1P_1P_0} \right\};$$

ferner ergiebt sich aus (b.),

(25.ᵃ) falls n gerade ist: $$(Q_n - P_n Q_0) = -2xP_n \times$$
$$\times \left\{ \frac{2n-1}{n(n-1)P_nP_{n-2}} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)P_{n-2}P_{n-4}} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)P_{n-4}P_{n-6}} \cdots + \frac{3}{2\cdot 1\cdot P_2P_0} \right\},$$

(25.ᵇ) und, falls n ungerade: $$\left(Q_n - \frac{P_nQ_1}{P_1}\right) = -2xP_n \times$$
$$\times \left\{ \frac{2n-1}{n(n-1)P_nP_{n-2}} + \frac{2n-5}{(n-2)(n-3)P_{n-2}P_{n-4}} + \frac{2n-9}{(n-4)(n-5)P_{n-4}P_{n-6}} \cdots + \frac{5}{3\cdot 2\cdot P_3P_1} \right\};$$

wobei zu bemerken, dass die linken Seiten dieser Formeln (24.) und (25.ᵃ, ᵇ) auch so darstellbar sind:

(26.) $$Q_n - P_n Q_0 = R_n,$$

(27.ᵃ) $$Q_n - P_n Q_0 = R_n,$$

(27.ᵇ) $$Q_n - \frac{P_nQ_1}{P_1} = R_n - \frac{P_nR_1}{P_1};$$

denn es ist $Q_0 = -P_0 \log \frac{x-1}{x+1}$, mithin $Q_n = R_n + P_n Q_0$, woraus z. B. für $n = 1$ folgt: $Q_1 = R_1 + P_1 Q_0$. [Vergl. Seite 1 und 2.] — Ferner erhält man aus Gleichung (f.):

(28.) $$\left(Q'_n - \frac{P'_nQ'_1}{P'_1}\right) = \frac{2P'_n}{x^2-1} \left\{ \frac{n}{P'_nP'_{n-1}} + \frac{n-1}{P'_{n-1}P'_{n-2}} + \frac{n-2}{P'_{n-2}P'_{n-3}} \cdots + \frac{2}{P'_2P'_1} \right\};$$

und daneben aus Gleichung (g.),

falls n gerade ist:

(29.ᵃ) $$\left(Q'_n - \frac{P'_nQ'_2}{P'_2}\right) = \frac{2xP'_n}{x^2-1} \left\{ \frac{2n-1}{P'_nP'_{n-2}} + \frac{2n-5}{P'_{n-2}P'_{n-4}} + \frac{2n-9}{P'_{n-4}P'_{n-6}} \cdots + \frac{7}{P'_nP'_2} \right\},$$

und, falls n ungerade:

$$(29.^b) \quad \left(Q'_n - \frac{P'_n Q'_1}{P'_1}\right) = \frac{2x P'_n}{x^2-1}\left\{\frac{2n-1}{P'_n P'_{n-2}} + \frac{2n-5}{P'_{n-2} P'_{n-4}} + \frac{2n-9}{P'_{n-4} P'_{n-6}} \cdots + \frac{5}{P'_n P'_1}\right\};$$

wobei zu beachten, dass die linken Seiten dieser Gleichungen (28.) und ($29.^{a, b}$) auch so darstellbar sind:

$$(30.) \quad Q'_n - \frac{P'_n Q'_1}{P'_1} = R'_n - \frac{2(P_n - x P'_n)}{x^2-1}$$

$$(31.^a) \quad Q'_n - \frac{P'_n Q'_2}{P'_2} = R'_n - \frac{2 P_n}{x^2-1} - \frac{P'_n((x^2-1) R'_2 - 2 P_2)}{(x^2-1) P'_2},$$

$$(31.^b) \quad Q'_n - \frac{P'_n Q'_1}{P'_1} = R'_n - \frac{2 P_n}{x^2-1} + \frac{2 P'_n P_1}{(x^2-1) P'_1}.$$

Bemerkung. — Aus der Formel (c.) ergiebt sich, wenn man mit $(P_n)^2$ dividirt:

$$\frac{P_n Q'_n - Q_n P'_n}{(P_n)^2} = -\frac{2}{(x^2-1)(P_n)^2};$$

und hieraus folgt durch Integration die bekannte Formel:

$$(32.) \quad \frac{Q_n}{P_n} = -2\int \frac{\partial x}{(x^2-1)(P_n)^2}.$$

§ 5.

Recurrente Relationen für die P_{nj} und Q_{nj}.

Aus jeder der Gleichungen (A.), (B.), $\cdots$ (I.), (II.), $\cdots$ (Seite 60, 61) lässt sich eine recurrente Relation für die P_{nj} ableiten. Differenzirt man nämlich jene Gleichungen $j$mal, und multiplicirt mit $(1-x^2)^{\frac{j}{2}}$, so erhält man auf Grund der Definition von P_{nj} (Seite 3) folgende Relationen:

$$(A.^d) \quad y P_{n,j+1} - (2j-n) x P_{nj} - j(j-n-1) y P_{n,j-1} - n P_{n-1,j} = 0,$$

$$(B.^d) \quad y P_{n,j+1} - (2j+n+1) x P_{nj} - j(j+n) y P_{n,j-1} + (n+1) P_{n+1,j} = 0,$$

$$(C.^d) \quad (n-j+1) y P_{n,j-1} - x P_{nj} + P_{n-1,j} = 0,$$

$$(D.^d) \quad (n+j) y P_{n,j-1} + x P_{nj} - P_{n+1,j} = 0,$$

wo zur Abkürzung y für $\sqrt{1-x^2}$ gesetzt ist. Und ferner erhält man durch das angegebene Verfahren noch folgende Relationen:

$$(\mathrm{I.^d}) \qquad (2n+1)\,x\,P_{nj} + j\,(2n+1)\,y\,P_{n,j-1} - n\,P_{n-1,j} - (n+1)\,P_{n+1,j} = 0\,,$$

$$(\mathrm{II.^d}) \qquad (2n+1)\,y\,P_{n,j-1} + P_{n-1,j} - P_{n+1,j} = 0\,,$$

$$(\mathrm{III.^d}) \qquad (2n+1)\,x\,P_{nj} + (j-1)(2n+1)\,y\,P_{n,j-1} - (n+1)\,P_{n-1,j} - n\,P_{n+1,j} = 0\,,$$

$$(\mathrm{IV.^d}) \quad (2n+1)\Big(y\,P_{n,j+1} - 2jx\,P_{nj} - j(j-1)\,y\,P_{n,j-1}\Big) + n\,(n+1)\Big(P_{n+1,j} - P_{n-1,j}\Big) = 0\,.$$

Die Elimination von $P_{n,j-1}$ aus (A.) und (C.) giebt*) eine Gleichung, die mit (α.) bezeichnet werden soll, und die identisch ist mit derjenigen, welche durch Elimination von $P_{n+1,j}$ aus (B.) und (D.), oder durch Elimination von $(P_{n+1,j} - P_{n-1,j})$ aus (II.) und (IV.) entsteht. Andererseits liefert die Elimination von $P_{n,j-1}$ aus (C.) und (D.) eine Gleichung, welche mit (β.) bezeichnet werden mag. Demgemäss können die vorstehenden *acht* Gleichungen (A.), (B.), (C.), (D.), (I.), (II.), (III.), (IV.) ersetzt werden durch die *sechs* Gleichungen (α.), (β.), (C.), (I.), (II.), (III.). Was aber diese *sechs* Gleichungen betrifft, so ist (III.) die Differenz von (I.) und (II.); auch lassen sich (I.) und (C.) durch einfache Combinationen aus (β.) und (II.) ableiten. Somit kann das System der eben genannten *sechs* Gleichungen durch folgende *drei* Gleichungen ersetzt werden:

$$(\alpha.) \qquad y\,P_{n,j+2} - 2\,(j+1)\,x\,P_{n,j+1} + (n-j)(n+j+1)\,y\,P_{n,j} = 0\,,$$

$$(\beta.) \qquad (2n+1)\,x\,P_{nj} - (n-j+1)\,P_{n+1,j} - (n+j)\,P_{n-1,j} = 0\,,$$

$$(\mathrm{II.}) \qquad (2n+1)\,y\,P_{n,j-1} - P_{n+1,j} + P_{n-1,j} = 0\,,$$

wo y nach wie vor zur Abkürzung steht für $\sqrt{1-x^2}$. In all' diesen Relationen für die $P_{n+p,\,j+q}$ darf kein Glied vorkommen, welches der Bedingung $j+q \leqq n+p$ widerspräche.

Da Q_{nj} [vergl. (8.), Seite 2] durch Q_n gerade ebenso definirt ist, wie P_{nj} durch P_n, so werden aus den Gleichungen (A.^{b}), (B.^{b}), $\cdots$ (I.^{b}), (II.^{b}), $\cdots$ (Seite 65) Relationen für die Q_{nj} entstehen, welche mit den soeben für die P_{nj} entwickelten Relationen (A.^{d}), (B.^{d}), $\cdots$ (I.^{d}), (II.^{d}), $\cdots$ vollkommen übereinstimmen, und welche daher, ebenso wie diese, reducirbar sind auf die *drei* Relationen (α.), (β.), (II.). Es ergiebt sich also:

$$(\alpha.)_q \qquad y\,Q_{n,j+2} - 2\,(j+1)\,x\,Q_{n,j+1} + (n-j)(n+j+1)\,y\,Q_{nj} = 0\,,$$

$$(\beta.)_q \qquad (2n+1)\,x\,Q_{nj} - (n-j+1)\,Q_{n+1,j} - (n+j)\,Q_{n-1,j} = 0\,,$$

$$(\mathrm{II.})_q \qquad (2n+1)\,y\,Q_{n,j-1} - Q_{n+1,j} + Q_{n-1,j} = 0\,.$$

---

*) Der Kürze wegen schreibe ich (A.), (B.), $\cdots$ für (A.^{d}), (B.^{d}), $\cdots$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den entsprechenden der P_{nj} nur dadurch, dass hier in Bezug auf die Werthe der beiderlei Indices ($n+p$ und $j+q$) *keine* Beschränkung stattfindet.

§ 6.

Recurrente Relationen für die S_{nj} und T_{nj}.

Man erhält noch zwei weitere Systeme recurrenter Relationen, eines für die S_{nj}, das andere für die T_{nj}; und zwar ist jedes dieser Systeme seiner Form nach mit dem System (α.), (β.), (II.) congruent, aber in Beziehung auf die Indices gewissen Beschränkungen unterworfen.

Die recurrenten Relationen der S_{nj} ergeben sich aus den Gleichungen (A.), (B.), $\cdots$ (Seite 60) dadurch, dass man diese Gleichungen, nachdem in ihnen z statt x gesetzt ist, mit $\frac{\partial z}{(x-z)^{j+1}}$ multiplicirt, und sodann zwischen ∞ und 1 integrirt. Denn die in solcher Weise entstehenden Integrale sind durch die S_{nj} ausdrückbar, auf Grund der für diese Functionen gegebenen Definition:

$$S_{nj} = h_j (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}, \qquad \text{(vergl. Seite 27)}, \tag{33.}$$

wo h_j den Werth hat:

$$h_j = (-1)^j \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j, \tag{34.}$$

mithin den Gleichungen entspricht:

$$h_{j+1} = -(j+1)\,h_j \qquad \text{und} \qquad h_{j-1} = -\frac{h_j}{j}. \tag{35.}$$

Ich werde diese Transformation bei der Gleichung (A.) durchführen, d. i. bei der Gleichung:

$$(z^2-1)\,P_n'(z) = nz\,P_n(z) - n\,P_{n-1}(z). \tag{36.}$$

Werden in dieser Gleichung für z und z^2-1 die Substitutionen gemacht:

$$z = x-(x-z), \qquad z^2-1 = (x^2-1) - 2x(x-z) + (x-z)^2,$$

so erhält man durch Multiplication mit $\frac{\partial z}{(x-z)^{j+1}}$ und Integration:

$$(x^2-1)\int \frac{P_n'(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} - 2x\int \frac{P_n'(z)\,\partial z}{(x-z)^{j}} + \int \frac{P_n'(z)\,\partial z}{(x-z)^{j-1}} = \tag{37.}$$
$$= nx\int \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} - n\int \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j}} + n\int \frac{P_{n-1}(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}}.$$

Werden die drei ersten Glieder dieser Gleichung partiell in Bezug auf $P'_n(z)$ integrirt, so heben sich die Theile, die ausserhalb des Integralzeichens zu stehen kommen, zwischen den Grenzen ∞ und 1 auf; so dass man erhält:

$$(38.)\quad (j+1)(1-x^2)\int_\infty^1 \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+2}} + (2j-n)x\int_\infty^1 \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} - (j-n-1)\int_\infty^1 \frac{P_n(z)\,\partial z}{(x-z)^j} + n\int_\infty^1 \frac{P_{n-1}(z)\,\partial z}{(x-z)^{j+1}} = 0.$$

Substituirt man endlich hier für sämmtliche Integrale die aus (33.) sich ergebenden Werthe, so folgt:

$$(39.)\quad -\sqrt{1-x^2}\,S_{n,j+1} + (2j-n)x\,S_{nj} + j(j-n-1)\,S_{n,j-1} + n\,S_{n-1,j} = 0.$$

Dies aber ist dieselbe Gleichung, welche aus (A.[d]) durch Vertauschung von P_{nj} mit S_{nj} sich ergeben würde.

Ebenso können nun, wie auf demselben Wege sich nachweisen lässt, in *sämmtlichen* Gleichungen (A.[d]), (B.[d]), (C.[d]), (D.[d]), (I.[d]), (II.[d]), (III.[d]), (IV.[d]) und folglich auch in den Gleichungen (α.), (β.), (II.) (Seite 74) die P_{nj} mit den S_{nj} vertauscht werden; so dass man also erhält:

$$(\alpha.)_s\quad y\,S_{n,j+2} - 2(j+1)x\,S_{n,j+1} + (n-j)(n+j+1)\,y\,S_{nj} = 0,$$

$$(\beta.)_s\quad (2n+1)x\,S_{nj} - (n-j+1)\,S_{n+1,j} - (n+j)\,S_{n-1,j} = 0,$$

$$(\text{II.})_s\quad (2n+1)\,y\,S_{n,j-1} - S_{n+1,j} + S_{n-1,j} = 0,$$

wo wiederum y zur Abkürzung steht für $\sqrt{1-x^2}$.

§ 7.

Tafeln für besondere Werthe der Kugelfunctionen und ihrer Abgeleiteten.

I. Tafel. Die Werthe der Functionen P_n, P_{nj} etc. für das Argument 0.

$$(\text{A.})\quad \begin{cases} P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \dfrac{1\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots n}, & \text{falls } n \text{ gerade;} \\ P_n(0) = 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

$$(\text{B.})\quad \begin{cases} P_n^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{n-j}{2}} \left(\dfrac{1+(-1)^{n-j}}{2}\right) \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n+j-1)}{2\cdot 4\cdots(n-j)}, \\ P_n^{(n)}(0) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1). \end{cases}$$

$$(\alpha.)\begin{cases} P_{n2}(0) = P_n''(0) = -n(n+1)\,P_n(0)\,, \\ P_{n4}(0) = P_n^{(4)}(0) = +(n-2)\,n\,(n+1)(n+3)\,P_n(0)\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{nj}(0) = P_n^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{j}{2}}\left[(n-j+2)(n-j+4)\cdots n\right]\left[(n+1)(n+3)\cdots(n+j-1)\right]P_n(0)\,. \end{cases}$$

Bei dieser Formelgruppe (α.) wird vorausgesetzt, dass die Zahlen n, j beide gerade sind.

$$(\beta.)\begin{cases} P_{n1}(0) = P_n'(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}\,, \\ P_{n3}(0) = P_n^{(3)}(0) = -(n-1)(n+2)\,P_{n1}(0)\,, \\ P_{n5}(0) = P_n^{(5)}(0) = +(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)\,P_{n1}(0)\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{nj}(0) = P_n^{(j)}(0) = (-1)^{\frac{j-1}{2}}\left[(n-j+2)(n-j+4)\cdots(n-1)\right]\left[(n+2)(n+4)\cdots(n+j-1)\right]P_{n1}(0). \end{cases}$$

Bei dieser Formelgruppe (β.) wird vorausgesetzt, dass die Zahlen n, j beide ungerade sind.

(γ.) Hingegen wird: $P_{nj}(0) = P_n^{(j)}(0) = 0\,,$ falls $(n+j)$ ungerade ist.

II. Tafel. Die Werthe der Functionen P_n, $P_n^{(j)}$ für das Argument ± 1.

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n\,,$$

$$P_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\,,$$

$$P_n''(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2}\frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{2\cdot4}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n^{(j)}(\pm 1) = (\pm 1)^{n-j}\frac{(n-j+1)(n-j+2)\cdots\cdots(n+j)}{2\cdot4\cdots2j}\,.$$

III. Tafel. Die Werthe der Functionen P_n, P_{nj} für das Argument ∞.

$$P_n(\infty) = \infty\,, \qquad \left(\frac{P_n(x)}{x^n}\right)_{x=\infty} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\,,$$

$$P_{nj}(\infty) = \infty\,, \qquad \left(\frac{P_{nj}(x)}{x^n}\right)_{x=\infty} = (-1)^{\frac{j}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-j)}\,.$$

IV. Tafel. Die Werthe der Functionen S_{nj} für die Argumente 0, ± 1 und ∞.

vorausgesetzt: $j > n$.

$$S_{nj}(0) = (1\cdot2\cdots j)\frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}\,, \quad \text{falls } n \text{ gerade,}$$

$$S_{nj}(0) = (1\cdot2\cdots j)\frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}\,, \quad \text{falls } n \text{ ungerade.}$$

$$S_{nj}(-1) = 0\,, \quad \text{hingegen wird:} \quad S_{nj}(+1) = \infty\,,$$

$$\left((1-x)^{\frac{j}{2}}S_{nj}(x)\right)_{x=+1} = 2^{\frac{j}{2}}\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(j-1)\,,$$

$$S_{nj}(\infty) = \infty\,,$$

$$\left(\frac{S_{nj}(x)}{x^n}\right)_{x=\infty} = (-1)^{n+j}(-1)^{\frac{j}{2}}\frac{[1\cdot2\cdot3\cdots(j-n-1)][(n+1)(n+2)\cdots2n]}{2^n}\,.$$

V. Tafel. Die Werthe der Functionen T_{nj} für die Argumente 0, ± 1 und ∞.

vorausgesetzt: $j > n$.

$$T_{nj}(0) = (-1)^j (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j) \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}, \quad \text{falls } n \text{ gerade.}$$

$$T_{nj}(0) = (-1)^{j+1} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots j) \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}, \quad \text{falls } n \text{ ungerade.}$$

$$T_{nj}(+1) = 0, \quad \text{hingegen wird:} \quad T_{nj}(-1) = \infty,$$

$$\left((1+x)^{\frac{j}{2}} T_{nj}(x)\right)_{x=-1} = (-1)^{n+j} 2^{\frac{j}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j-1),$$

$$T_{nj}(\infty) = \infty,$$

$$\left(\frac{T_{nj}(x)}{x^n}\right)_{x=\infty} = (-1)^{n+j} (-1)^{\frac{j}{2}} \frac{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (j-n-1)][(n+1)(n+2)\cdots 2n]}{2^n}.$$

VI. Tafel. Die Werthe der Functionen Q_{nj} für das Argument 0.

$$Q_0(0) = -\log(-1), \qquad Q_n(0) = [\log(-1)](-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n}, \quad \text{falls } n \text{ gerade.}$$

$$Q_1(0) = -2, \qquad Q_n(0) = 2(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdots n}, \quad \text{falls } n \text{ ungerade.}$$

für $j \leq n$.

$$Q_{nj}(0) = -[\log(-1)](-1)^{\frac{n+j}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n+j-1)}{2 \cdot 4 \cdots (n-j)}, \quad n, j \text{ beide gerade.}$$

$$Q_{nj}(0) = 2(-1)^{\frac{n+j-1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \cdots (n+j-1)}{1 \cdot 3 \cdots (n-j)}, \quad n \text{ gerade, } j \text{ ungerade.}$$

$$Q_{nj}(0) = 2(-1)^{\frac{n+j+1}{2}} \frac{2 \cdot 4 \cdots (n+j-1)}{1 \cdot 3 \cdots (n-j)}, \quad n \text{ ungerade, } j \text{ gerade.}$$

$$Q_{nj}(0) = [\log(-1)](-1)^{\frac{n+j}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdots (n+j-1)}{2 \cdot 4 \cdots (n-j)}, \quad n, j \text{ beide ungerade.}$$

für $j > n$.

$$Q_{nj}(0) = 0, \quad \text{falls } n+j \text{ gerade.}$$

$$Q_{nj}(0) = 2(1 \cdot 2 \cdots j) \frac{(j+1)(j+3)\cdots(j+n-1)}{j(j-2)\cdots(j-n)}, \quad n \text{ gerade, } j \text{ ungerade.}$$

$$Q_{nj}(0) = 2(1 \cdot 2 \cdots j) \frac{(j+2)(j+4)\cdots(j+n-1)}{(j-1)(j-3)\cdots(j-n)}, \quad n \text{ ungerade, } j \text{ gerade.}$$

VII. Tafel. Die Werthe der Functionen Q_n, Q_{nj}, $Q_n^{(j)}$ für das Argument ± 1.

einerlei, ob $j \leq n$ oder $j > n$ ist.

$$Q_n(\pm 1) = \infty,$$

$$Q_{nj}(\pm 1) = Q_n^{(j)}(\pm 1) = \infty.$$

$$\Big((1-x^2)\,Q_n(x)\Big)_{x=1} = 0\,, \qquad \Big((1-x^2)\,Q_n(x)\Big)_{x=-1} = 0\,,$$

$$\Big((1-x^2)\,Q_n'(x)\Big)_{x=1} = 2\,, \qquad \Big((1-x^2)\,Q_n'(x)\Big)_{x=-1} = 2\,P_n(-1)\,,$$

$$\Big((1-x^2)^2\,Q_n''(x)\Big)_{x=1} = 1\cdot 2^2\,, \qquad \Big((1-x^2)^2\,Q_n''(x)\Big)_{x=-1} = -\,1\cdot 2^2\,P_n(-1)\,,$$

$$\Big((1-x^2)^3\,Q_n'''(x)\Big)_{x=1} = 1\cdot 2\cdot 2^3\,, \qquad \Big((1-x^2)^3\,Q_n'''(x)\Big)_{x=-1} = 1\cdot 2\cdot 2^3\,P_n(-1)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Big((1-x^2)^j\,Q_n^{(j)}(x)\Big)_{x=1} = 1\cdot 2\cdots(j-1)\,2^j\,, \quad \Big((1-x^2)^j\,Q_n^{(j)}(x)\Big)_{x=-1} = (-1)^{j-1}\,1\cdot 2\cdots(j-1)\,2^j\,P_n(-1)\,,$$

wo j kleiner, gleich oder grösser als n sein kann.

VIII. Tafel. Die Werthe der Functionen Q_n, Q_{nj} für das Argument ∞.

$$Q_n(\infty) = 0\,,$$

$$\Big(x^{n+1}\,Q_n(x)\Big)_{x=\infty} = 2\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,,$$

einerlei, ob $j \leqq n$ oder, ob $j > n$ ist.
$$\begin{cases} Q_{nj}(\infty) = 0\,, \\ \Big(x^{n+1}\,Q_{nj}(x)\Big)_{x=\infty} = (-1)^{\frac{3j}{2}}\cdot 2\,\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+j)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,. \end{cases}$$

Bemerkungen über diese Tafeln. — Die Formeln (A.) und (B.) der *I. Tafel* ergeben sich aus der Gleichung (2.), Seite 1. Sodann aber ergeben sich aus (B.) alle übrigen Formeln dieser Tafel.

Die Formeln der *II. Tafel* ergeben sich leicht aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n\,P_n(\mu)$$

und aus denjenigen Gleichungen, die aus dieser durch wiederholte Differentiation nach μ entstehen. Entwickelt man nämlich in jeder solchen Gleichung, nachdem $\mu = \pm 1$ gesetzt worden ist, die linke Seite nach Potenzen von r, so müssen die Coefficienten dieser Potenzen auf beiden Seiten einander gleich sein. Und hieraus ergeben sich die in der Tafel aufgeführten Formeln.

Die Formeln der *III. Tafel,* zu denen man etwa noch folgende hinzufügen könnte:

$$\left(\frac{P_n^{(j)}(x)}{x^{n-j}}\right)_{x=\infty} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-j)}\,,$$

ergeben sich leicht aus der Gleichung (2.), Seite 1.

In der *IV. Tafel* repräsentiren die 3[te] und 5[te] Zeile eine unmittelbare Folge der für S_{nj} gegebenen Definition, (vergl. Seite 2, 3 und 22.) Ferner

ergeben sich die 1[te], 2[te] und 4[te] Zeile respective aus der Gleichung (21.) Seite 44, aus (26.) Seite 45 und aus (21.) Seite 30. — Um endlich die 6[te] Zeile zu erhalten, hat man zu beachten, dass nach Seite 22

$$S_{nj}(x) = Y_1$$

ist, wo Y_1 die Reihe Seite 18 vorstellt, und ferner zu beachten, dass die in dieser Reihe enthaltene Constante A_1 den in (7.), Seite 27, angegebenen Werth hat.

Die Formeln der *V. Tafel* ergeben sich aus denen der IV. Tafel durch Anwendung des in (9.), Seite 27, angegebenen Satzes.

In der *VI. Tafel* ergiebt sich die 1[te] Zeile aus (28.), (29.), Seite 55, und die 2[te] Zeile aus (32.), (33.), Seite 56. Ferner ergeben sich die 3[te], 4[te], 5[te], 6[te] Zeile aus den Formeln (30.), (31.), (34.), (35.), Seite 55, 56. — Ferner erhält man die *drittletzte* Zeile aus (14.), Seite 14. Und endlich erhält man die *vorletzte* und *letzte* Zeile, welche in die *eine* Formel

$$Q_{nj}(0) = 2\,[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (j+n-1)]\,[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (j-n-2)]$$

zusammengefasst werden können, aus (15.), Seite 14.

Die Formeln der *VII. Tafel* beziehen sich theils auf Q_{nj}, theils auf $Q_n^{(j)}$. Die erstern ergeben sich aus (17.), (18.), Seite 17; die letztern direct aus der allgemeinen Formel:

$$Q_n(x) = R_n(x) - P_n(x) \log \frac{x-1}{x+1}.$$

Schliesslich ergiebt sich die *VIII. Tafel* aus den Formeln auf Seite 13. Vergl. auch (17.), (18.), Seite 17.

Zweite Abtheilung.

Entwicklung des Productes zweier Kugelfunctionen in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.

In dieser zweiten Abtheilung soll das *Product zweier Kugelfunctionen*, mögen nun dieselben gleicher oder verschiedener Art, mit gleichen oder verschiedenen Indices behaftet sein, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt werden. — Zu diesem Zweck werde ich zunächst in

§ 1 zeigen, dass das Product Y zweier Kugelfunctionen einer gewissen

(1) *linearen Differentialgleichung vierter Ordnung*

Genüge leistet, deren constante Coefficienten abhängig sind von den Indices p und q der beiden betrachteten Kugelfunctionen. Dabei wird sich eine einfache Beziehung zwischen dem Product der beiden Kugelfunctionen und dem Product der entsprechenden *abgeleiteten* Kugelfunctionen ersten Grades ergeben. Bezeichnet man nämlich die beiden gegebenen Kugelfunctionen (um die Frage nach ihrer *Art* ganz *in suspenso* zu lassen) mit U und V, oder genauer mit U_p und V_q, ferner die entsprechenden *abgeleiteten* Kugelfunctionen ersten Grades mit $U_{p,1}$ und $V_{q,1}$, endlich das gemeinschaftliche Argument all' dieser Functionen mit σ, so wird sich ergeben, dass zwischen den Producten

$$(2.) \qquad Y = U_p V_q \qquad \text{und} \qquad Z = U_{p,1} V_{q,1}$$

folgende Beziehung stattfindet:

$$(3.) \qquad Z = \frac{p(p+1) - q(q+1)}{2} Y + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right).$$

Ferner wird sich herausstellen, dass die in (1.) erwähnte Differentialgleichung *vierter* Ordnung für den Specialfall $p = q$ sich reducirt auf eine Differentialgleichung *dritter* Ordnung. Dieser letzteren wird also z. B. genügt werden durch $U_p V_p$, ebenso durch $[U_p]^2$, d. i. durch das *Quadrat* einer Kugelfunction p^{ter} Ordnung. — Beiläufig werde ich sodann in

§ 1.[a] diejenigen linearen Differentialgleichungen *vierter, fünfter,* u. s. w. Ordnung aufstellen, denen resp. durch die *dritte, vierte,* u. s. w. Potenz einer Kugelfunction p^{ter} Ordnung Genüge geschieht.

§ 2. Die nähere Untersuchung der Gleichung (1.) zeigt, dass derselben genügt wird durch folgenden Ausdruck:

$$Y = C\left[P_\nu + \frac{b_0}{a_2} P_{\nu-2} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} P_{\nu-4} + \frac{b_0 b_2 b_4}{a_2 a_4 a_6} P_{\nu-6} + \cdots\right], \tag{4.}$$

wo C eine willkürliche Constante bezeichnet, ferner $a_2, a_4, a_6, \cdots$ und $b_0, b_2, b_4, \cdots$ bestimmte von ν abhängende Zahlen sind, und wo endlich ν selber nach Belieben

$$\begin{array}{rll} \text{entweder} & = p+q & = s, \\ \text{oder} & = -(p+q+2) & = -(s+2), \\ \text{oder} & = q-p-1 & = -(d+1), \\ \text{oder} & = p-q-1 & = d-1 \end{array} \tag{5.}$$

genommen werden kann. Hier ist zur Abkürzung $p+q=s$ und $p-q=d$ gesetzt. — In solcher Weise ergeben sich also die vier *particularen Integrale* der Gleichung (1.). Diese particularen Integrale, welche den Werthen (5.) der Zahl ν entsprechend mit J_s, $J_{-(s+2)}$, $J_{-(d+1)}$, J_{d-1} bezeichnet sein mögen, sind, wie die Formel (4.) zeigt, auf lineare Weise zusammengesetzt aus einer begrenzten respective unbegrenzten Anzahl von Kugelfunctionen, und zwar nicht nur aus den P, sondern unter Umständen auch aus den Q. Denn in jener Formel (4.) repräsentirt P_λ eine Kugelfunction *erster* oder *zweiter* Art, jenachdem der Index λ *positiv* oder *negativ* ist; in der That sind daselbst $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \cdots$ als identisch anzusehen respective mit $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$. (Vergl. Seite 67.)

§ 3. Die genauere Untersuchung der vier particularen Integrale J zeigt, dass dieselben folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} J_s &= A^1 P_s + B^1 P_{s-2} + C^1 P_{s-4} + \cdots K^1 P_d, \\ J_{-(s+2)} &= A^2 Q_{s+1} + B^2 Q_{s+3} + C^2 Q_{s+5} + \cdots \text{ in inf.}, \\ J_{-(d+1)} &= A^3 Q_s + B^3 Q_{s-2} + C^3 Q_{s-4} + \cdots K^3 Q_d, \\ J_{d-1} &= A^4 P_{d-1} + B^4 P_{d-3} + C^4 P_{d-5} + \cdots K^4 P_\delta, \end{aligned} \tag{6.}$$

wo der Index δ des letzten Gliedes der letzten Zeile 0 oder 1 ist, jenachdem die Zahl d ungerade oder gerade, und wo selbstverständlich die A, B, C, $\cdots$ K constante Coefficienten vorstellen. — Von den beiden folgenden Paragraphen

§ 3ª und 3ᵇ enthält der *erstere* die Ableitung eines in § 3 benützten Satzes, während der *andere* nur beiläufige Betrachtungen darbietet.

§ 4. Die Differentialgleichung (1.) besitzt die vier particularen Integrale J; andererseits aber besitzt sie, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, auch das particulare Integral $U_p V_q$, d. i. die vier particularen Integrale $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $Q_p P_q$, $P_p Q_q$. Folglich muss jedes dieser vier letzten in linearer Weise durch die J ausdrückbar sein, mithin die Form haben:

$$AJ_s + BJ_{-(s+2)} + CJ_{-(d+1)} + DJ_{d-1}. \tag{7.}$$

Die Constanten A, B, C, D werden nun für jedes jener vier Producte bestimmt; wobei auch für die beiden letzten (scheinbar gleichartigen) Producte $Q_p P_q$ und $P_p Q_q$ sich wesentlich verschiedene Resultate ergeben, falls man jedesmal p als den *grösseren* der beiden Indices p, q ansieht. In der That wird ja auch durch die Festsetzung $p \geqq q$ zwischen diesen beiden Producten ein Unterschied hervorgerufen, indem alsdann das eine ein Product PQ repräsentirt, in welchem Q, das andere hingegen ein Product PQ, in welchem P den *grösseren Index* hat.

§ 5. Wir haben jetzt*) also für jedes der Producte $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $Q_p P_q$, $P_p Q_q$ einen Ausdruck von der Form (7.), und für die hier auftretenden J die in (6.) genannten Reihen. Damit ist die Entwicklung jener vier Producte nach Kugelfunctionen im Wesentlichen vollendet. Was die resultirenden Formeln betrifft, so ergeben sich für $P_p P_q$ und $Q_p P_q$ Entwicklungen von der Form:

$$P_p P_q = \mathfrak{A} P_s + \mathfrak{B} P_{s-2} + \mathfrak{C} P_{s-4} \cdots + \mathfrak{K} P_d, \tag{8.}$$

$$Q_p P_q = \mathfrak{A} Q_s + \mathfrak{B} Q_{s-2} + \mathfrak{C} Q_{s-4} \cdots + \mathfrak{K} Q_d, \tag{9.}$$

d. i. Entwicklungen, in denen die constanten Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\cdot\cdot$ $\mathfrak{K}$ *ein und dieselben* sind. Ferner ergiebt sich für $Q_p Q_q$ die *unendliche* Reihe:

$$Q_p Q_q = \mathsf{A} Q_{s+1} + \mathsf{B} Q_{s+3} + \Gamma Q_{s+5} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{10.}$$

wo A, B, Γ, $\cdots$ constante Coefficienten sind. Endlich erhält man für die Differenz des letzten Productes $P_p Q_q$ gegenüber dem in (9.) genannten folgende Formeln:

$$P_p Q_q - Q_p P_q = \mathfrak{L} P_{d-1} + \mathfrak{M} P_{d-3} \cdots + \mathfrak{S} P_2 + \mathfrak{T} P_0, \tag{11.}$$

$$P_p Q_q - Q_p P_q = \mathfrak{L} P_{d-1} + \mathfrak{M} P_{d-3} \cdots + \mathfrak{V} P_3 + \mathfrak{W} P_1, \tag{12.}$$

nämlich die *erste* oder *zweite*, jenachdem die Zahl $d = p - q$ *ungerade* oder *gerade* ist. Dabei bezeichnen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\cdots$ $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\cdots$ $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$

*) Falls wir nämlich die Operationen des § 4. uns *bereits ausgeführt* vorstellen.

zwei *Constanten-Reihen*, die in ihren letzten Gliedern von einander abweichen. Um die Entwicklung dieses letzten Productes $P_p Q_q$ in vollständig fertiger Gestalt zu haben, braucht man schliesslich nur die Gleichung (11.), resp. (12.) mit der Gleichung (9.) durch Addition zu verbinden; woraus ersichtlich, dass die Entwicklung dieses Productes sowohl die P als auch die Q enthält.

§ 5.[a] Dieser Paragraph enthält einige beiläufige Betrachtungen, und zeigt z. B., dass unter den gefundenen Entwicklungen als ganz specieller Fall auch folgende enthalten ist:

$$\log \frac{1-\sigma}{1+\sigma} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{1\cdot 2} P_1(\sigma) + \frac{7}{3\cdot 4} P_3(\sigma) + \frac{11}{5\cdot 6} P_5(\sigma) + \cdots\right]. \tag{13.}$$

§ 6. Aus den Entwicklungen für die Producte $Y = U_p V_q$ werden, mittelst der Formel (3.), analoge Entwicklungen abgeleitet für die Producte $Z = U_{p,1} V_{q,1}$, nämlich Entwicklungen, die ebenfalls nach den Kugelfunctionen fortschreiten. So ergiebt sich z. B., parallel zur Formel (8.):

$$P_p P_q = \mathfrak{A} P_s + \mathfrak{B} P_{s-2} + \mathfrak{C} P_{s-4} \cdots\cdots + \mathfrak{K} P_d, \tag{14.}$$

folgende Formel:

$$P_{p,1} P_{q,1} = (p,\, q)_s \mathfrak{A} P_s + (p,\, q)_{s-2} \mathfrak{B} P_{s-2} \cdots\cdots + (p,\, q)_d \mathfrak{K} P_d, \tag{15.}$$

wo die neu hinzutretenden Coefficienten definirt sind durch:

$$(\mu,\, \nu)_\lambda = \frac{\mu(\mu+1) + \nu(\nu+1) - \lambda(\lambda+1)}{2}. \tag{16.}$$

§ 7. Die für die Kugelfunctionen U_p und V_q geltenden Differentialgleichungen führen zu der Formel:

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, U_p V_{q,1} = \int \left(U_{p,1} V_{q,1} - q(q+1) U_p V_q\right) \partial\sigma; \tag{17.}$$

und diese Formel ihrerseits führt zu einer gewissen Entwicklung des Productes $U_p V_{q,1}$, jedoch zu einer Entwicklung, welche nicht mehr nach Kugelfunctionen, sondern nach den *abgeleiteten* Kugelfunctionen ersten Grades fortschreitet. So z. B. erhält man, parallel mit (14.), (15.), die Formel:

$$P_p P_{q,1} = \frac{(s,\, q)_p}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1} + \frac{(s-2,\, q)_p}{(s-2)(s-1)} \mathfrak{B} P_{s-2,1} \cdots + \frac{(d,\, q)_p}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1}, \tag{18.}$$

wo die Coefficienten $(\mu, \nu)_\lambda$ wiederum durch (16.) definirt sind.

§ 8. Die Uebereinstimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\cdots$ $\mathfrak{K}$ in den beiden Entwicklungen (8.), (9.) führt zu der Formel:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)\, P_q(z)\, \partial z}{\sigma - z} = Q_p(\sigma)\, P_q(\sigma);$$

und in analoger Weise ergeben sich noch andere, ähnliche Formeln, die ebenfalls zwischen den Kugelfunctionen resp. den *abgeleiteten* Kugelfunctionen Beziehungen darbieten, die sich mittelst bestimmter Integrale ausdrücken.

Tabellarische Uebersicht. — Die zunächst folgenden acht Tabellen A, B, A′, B′, C, D, D′, D″ sollen nicht nur einen Ueberblick gewähren über die Formeln, zu denen die vorliegenden Untersuchungen schliesslich hinleiten, sondern auch dazu dienen, um bei meinen Expositionen mich hin und wieder kürzer fassen, und lästige Wiederholungen vermeiden zu können. — In den Tabellen A, B findet man *dieselben* Formeln wie in A′, B′, aber jede Formel in *umgekehrter* Anordnung. Demgemäss sind die constanten Coefficienten in A, B mit

(A, B.) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots \mathfrak{H}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K},$ resp. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \mathfrak{k},$

hingegen in A′, B′ mit

(A′, B′.) $\mathfrak{K}, \mathfrak{J}, \mathfrak{H}, \cdots \mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A},$ resp. $\mathfrak{k}, \mathfrak{i}, \mathfrak{h}, \cdots \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}$

bezeichnet. — Aehnlich ist die Beziehung der Tabelle D zu den Tabellen D′ und D″. So z. B. findet man in D die schon in (11.), (12.) erwähnten Formeln mit den Coefficienten

(D.) $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W},$

von denen die eine oder die andere anzuwenden ist, jenachdem *d ungerade*, oder *gerade*. Die Tabelle D′ giebt die *erste* dieser beiden Formeln in *umgekehrter* Anordnung, also versehen mit den Coefficienten:

(D′.) $\mathfrak{T}, \mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \cdots \mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L};$

und ebenso giebt die Tabelle D″ die *zweite* der beiden Formeln in *umgekehrter* Ordnung, also versehen mit den Coefficienten:

(D″.) $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}, \mathfrak{U}, \cdots \mathfrak{N}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}.$

Noch sei bemerkt, dass in den Tabellen Gebrauch gemacht ist von den schon erwähnten, durch (16.) definirten Zahlen $(\mu, \nu)_\lambda$. Auch sei bemerkt, dass unter $f(n)$ die durch die Formeln:

$$f(0) = f(1) = 1, \qquad f(n) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \tag{19.}$$

definirte Function zu verstehen ist. Endlich sei bemerkt, dass das Argument der Functionen P_n, Q_n, $P_{n,1}$, $Q_{n,1}$ in unsern Tabellen stets *ein und dasselbe*, und mit σ bezeichnet ist.

Tabelle A. — Entwicklung der Producte PP.

Die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) sind gültig für $p \geqq q$, und umfassen demgemäss die Formeln (5.), (6.), (7.) als specielle Fälle.

$$(1.)\qquad P_p P_q = \mathfrak{A} P_s + \mathfrak{B} P_{s-2} + \mathfrak{C} P_{s-4} + \mathfrak{D} P_{s-6} \cdots\cdots + \mathfrak{K} P_d,$$

$$(2.)\qquad P_{p,1} P_{q,1} = (p,\, q)_s \mathfrak{A} P_s + (p,\, q)_{s-2} \mathfrak{B} P_{s-2} + (p,\, q)_{s-4} \mathfrak{C} P_{s-4} \cdots\cdots + (p,\, q)_d \mathfrak{K} P_d,$$

$$(3.)\qquad P_{p,1} P_q = \frac{(s,\, p)_q}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1} + \frac{(s-2,\, p)_q}{(s-2)(s-1)} \mathfrak{B} P_{s-2,1} \cdots\cdots + \frac{(d,\, p)_q}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1},$$

$$(4.)\qquad P_p P_{q,1} = \frac{(s,\, q)_p}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1} + \frac{(s-2,\, q)_p}{(s-2)(s-1)} \mathfrak{B} P_{s-2,1} \cdots\cdots + \frac{(d,\, q)_p}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1};$$

$$(5.)\qquad [P_p]^2 = \mathfrak{a} P_{2p} + \mathfrak{b} P_{2p-2} + \mathfrak{c} P_{2p-4} + \mathfrak{d} P_{2p-6} \cdots\cdots + \mathfrak{k} P_0,$$

$$(6.)\qquad [P_{p,1}]^2 = (p,\, p)_{2p}\, \mathfrak{a} P_{2p} + (p,\, p)_{2p-2}\, \mathfrak{b} P_{2p-2} \cdots\cdots + (p,\, p)_0\, \mathfrak{k} P_0,$$

$$(7.)\qquad P_{p,1} P_p = \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{a} P_{2p,1} + \mathfrak{b} P_{2p-2,1} + \mathfrak{c} P_{2p-4,1} \cdots\cdots + \mathfrak{k} P_{0,1}\right].$$

Die Coefficienten vorstehender sieben Formeln sind angegeben in (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) und (ζ.).

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = f(q)\, \dfrac{(p+1)(p+2)\cdots s}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2s-1)} = \dfrac{f(p)f(q)}{f(s)}, \qquad \text{[Vergl. (19), Seite 85.]} \\[2ex] \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2p}{2p-1}\right)\left(\dfrac{2q}{2q-1}\right)\left(\dfrac{2s+1}{2s}\right)\left\{\dfrac{2s-3}{2s+1}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\dfrac{2p(2p-2)}{(2p-1)(2p-3)}\right)\left(\dfrac{2q(2q-2)}{(2q-1)(2q-3)}\right)\left(\dfrac{(2s+1)(2s-1)}{2s(2s-2)}\right)\left\{\dfrac{2s-7}{2s+1}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\dfrac{2p(2p-2)(2p-4)}{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}\right)\left(\dfrac{2q(2q-2)(2q-4)}{(2q-1)(2q-3)(2q-5)}\right)\left(\dfrac{(2s+1)(2s-1)(2s-3)}{2s(2s-2)(2s-4)}\right)\left\{\dfrac{2s-11}{2s+1}\right\}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathfrak{K} = \mathfrak{A} \left(\dfrac{2p(2p-2)\cdots(2d+2)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(2d+1)}\right)\left(\dfrac{(2s+1)(2s-1)\cdots(2p+3)}{2s(2s-2)\cdots(2p+2)}\right)\left\{\dfrac{2d+1}{2s+1}\right\} \end{cases}$$

NB. Die Coefficienten (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.) sind berechnet auf Grund der in (16.), Seite 84, für $(\mu,\, \nu)_\lambda$ gegebenen Definition.

Gehörig zu (Tab. A. 2) und (Tab. B. 2).

$$(\gamma.)\quad \begin{cases} (p,\, q)_s = -pq, \\ (p,\, q)_{s-2} = -(p-2)(q-2) + 1\cdot 3, \\ (p,\, q)_{s-4} = -(p-4)(q-4) + 2\cdot 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (p,\, q)_{s-\lambda} = -(p-\lambda)(q-\lambda) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1). \end{cases}$$

Zu (Tab. A. 3) und (Tab. B. 3).

$$(\delta.)\quad \begin{cases} (s,\, p)_q = p(s+1), \\ (s-2,\, p)_q = (p-2)(s+1) + 1\cdot 3, \\ (s-4,\, p)_q = (p-4)(s+1) + 2\cdot 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (s-\lambda,\, p)_q = (p-\lambda)(s+1) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1). \end{cases}$$

Tabelle B. — Entwicklung solcher Producte QP, in denen der Index von Q der grössere ist, resp. beide Indices einander gleich sind.

Die Formeln (1.), (2.) gelten für $p \geqq q$, und umfassen daher die Formeln (5.), (6.) als specielle Fälle. Hingegen sind die Formeln (3.), (4.) nur gültig für $p > q$, und bedürfen für $p = q$, wie aus (7.), (8.) ersichtlich, einer gewissen Abänderung.

$$Q_p\, P_q = \mathfrak{A}\, Q_s + \mathfrak{B}\, Q_{s-2} + \mathfrak{C}\, Q_{s-4} + \mathfrak{D}\, Q_{s-6} \cdots\cdots + \mathfrak{K}\, Q_d, \tag{1.}$$

$$Q_{p,1}\, P_{q,1} = (p,\, q)_s\, \mathfrak{A}\, Q_s + (p,\, q)_{s-2}\, \mathfrak{B}\, Q_{s-2} + (p,\, q)_{s-4}\, \mathfrak{C}\, Q_{s-4} \cdots\cdots + (p,\, q)_d\, \mathfrak{K}\, Q_d, \tag{2.}$$

$$Q_{p,1}\, P_q = \frac{(s,\, p)_q}{s\,(s+1)}\, \mathfrak{A}\, Q_{s,1} + \frac{(s-2,\, p)_q}{(s-2)\,(s-1)}\, \mathfrak{B}\, Q_{s-2,1} \cdots\cdots + \frac{(d,\, p)_q}{d\,(d+1)}\, \mathfrak{K}\, Q_{d,1}, \tag{3.}$$

$$Q_p\, P_{q,1} = \frac{(s,\, q)_p}{s\,(s+1)}\, \mathfrak{A}\, Q_{s,1} + \frac{(s-2,\, q)_p}{(s-2)\,(s-1)}\, \mathfrak{B}\, Q_{s-2,1} \cdots\cdots + \frac{(d,\, q)_p}{d\,(d+1)}\, \mathfrak{K}\, Q_{d,1}; \tag{4.}$$

$$Q_p\, P_p = \mathfrak{a}\, Q_{2p} + \mathfrak{b}\, Q_{2p-2} + \mathfrak{c}\, Q_{2p-4} + \mathfrak{d}\, Q_{2p-6} \cdots\cdots + \mathfrak{k}\, Q_0, \tag{5.}$$

$$Q_{p,1}\, P_{p,1} = (p,\, p)_{2p}\, \mathfrak{a}\, Q_{2p} + (p,\, p)_{2p-2}\, \mathfrak{b}\, Q_{2p-2} \cdots\cdots + (p,\, p)_0\, \mathfrak{k}\, Q_0, \tag{6.}$$

$$Q_{p,1}\, P_p = +\tfrac{1}{2}\, Q_{0,1} + \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{a}\, Q_{2p,1} + \mathfrak{b}\, Q_{2p-2,1} \cdots\cdots + \mathfrak{k}\, Q_{0,1}\right], \tag{7.}$$

$$Q_p\, P_{p,1} = -\tfrac{1}{2}\, Q_{0,1} + \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{a}\, Q_{2p,1} + \mathfrak{b}\, Q_{2p-2,1} \cdots + \mathfrak{k}\, Q_{0,1}\right]. \tag{8.}$$

Die Coefficienten vorstehender acht Formeln sind angegeben in (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) und (ζ.).

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = f(p)\, \dfrac{(p+1)\,(p+2)\cdots 2p}{(2p+1)\,(2p+3)\cdots(4p-1)} = \dfrac{f(p)\, f(p)}{f(2p)}, \qquad \text{[Vergl. (19.), Seite 85.]} \\[2ex] \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2p}{2p-1}\right)^2\left(\dfrac{4p+1}{4p}\right)\left\{\dfrac{4p-3}{4p+1}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\dfrac{2p\,(2p-2)}{(2p-1)\,(2p-3)}\right)^2\left(\dfrac{(4p+1)\,(4p-1)}{4p\,(4p-2)}\right)\left\{\dfrac{4p-7}{4p+1}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\dfrac{2p\,(2p-2)\,(2p-4)}{(2p-1)\,(2p-3)\,(2p-5)}\right)^2\left(\dfrac{(4p+1)\,(4p-1)\,(4p-3)}{4p\,(4p-2)\,(4p-4)}\right)\left\{\dfrac{4p-11}{4p+1}\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{k} = \mathfrak{a}\left(\dfrac{2p\,(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)\,(2p-3)\cdots 1}\right)\left(\dfrac{(4p+1)\,(4p-1)\cdots(2p+3)}{4p\,(4p-2)\cdots(2p+2)}\right)\left\{\dfrac{1}{4p+1}\right\}. \end{cases}$$

NB. Man beachte, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$ nichts Anderes sind als die *speciellen* Werthe von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots$ für $p = q$.

Zu (Tab. A. 4) und (Tab. B. 4).

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} (s,\, q)_p = q\,(s+1), \\ (s-2,\, q)_p = (q-2)\,(s+1) + 1\cdot 3, \\ (s-4,\, q)_p = (q-4)\,(s+1) + 2\cdot 5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (s-\lambda,\, q)_p = (q-\lambda)\,(s+1) + \tfrac{1}{2}\lambda\,(\lambda+1). \end{cases}$$

Zu (Tab. A. 6) und (Tab. B. 6).

$$(\zeta.)\quad \begin{cases} (p,\, p)_{2p} = -p^2, \\ (p,\, p)_{2p-2} = -(p-2)^2 + 1\cdot 3, \\ (p,\, p)_{2p-4} = -(p-4)^2 + 2\cdot 5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p,\, p)_{2p-\lambda} = -(p-\lambda)^2 + \tfrac{1}{2}\lambda\,(\lambda+1). \end{cases}$$

Tabelle A'. — Entwicklung der Producte PP.

Die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) sind gültig für $p \geqq q$, und umfassen demgemäss die Formeln (5.), (6.), (7.) als specielle Fälle.

$$(1.)\qquad P_p P_q = \mathfrak{K} P_d + \mathfrak{J} P_{d+2} + \mathfrak{H} P_{d+4} + \mathfrak{G} P_{d+6} \cdots\cdots + \mathfrak{A} P_s,$$

$$(2.)\qquad P_{p,1} P_{q,1} = (p, q)_d \mathfrak{K} P_d + (p, q)_{d+2} \mathfrak{J} P_{d+2} + (p, q)_{d+4} \mathfrak{H} P_{d+4} \cdots\cdots + (p, q)_s \mathfrak{A} P_s,$$

$$(3.)\qquad P_{p,1} P_q = \frac{(d, p)_q}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1} + \frac{(d+2, p)_q}{(d+2)(d+3)} \mathfrak{J} P_{d+2,1} \cdots\cdots + \frac{(s, p)_q}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1},$$

$$(4.)\qquad P_p P_{q,1} = \frac{(d, q)_p}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1} + \frac{(d+2, q)_p}{(d+2)(d+3)} \mathfrak{J} P_{d+2,1} \cdots\cdots + \frac{(s, q)_p}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1};$$

$$(5.)\qquad [P_p]^2 = \mathfrak{k} P_0 + \mathfrak{i} P_2 + \mathfrak{h} P_4 \cdots\cdots + \mathfrak{a} P_{2p},$$

$$(6.)\qquad [P_{p,1}]^2 = (p, p)_0 \mathfrak{k} P_0 + (p, p)_2 \mathfrak{i} P_2 \cdots\cdots\cdots + (p, p)_{2p} \mathfrak{a} P_{2p},$$

$$(7.)\qquad P_{p,1} P_p = \tfrac{1}{2}\left[\mathfrak{k} P_{0,1} + \mathfrak{i} P_{2,1} + \mathfrak{h} P_{4,1} \cdots\cdots + \mathfrak{a} P_{2p,1}\right].$$

Die Coefficienten vorstehender sieben Formeln sind angegeben in (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) und (ζ.).

$$(\alpha.)\begin{cases}
\mathfrak{K} = f(q) \dfrac{(d+1)(d+2)\cdots p}{(2d+3)(2d+5)\cdots(2p+1)} = \dfrac{(d+1) f(d+1) \cdot f(q)}{(p+1) f(p+1)}, \qquad \text{[Vergl. (19.), Seite 85.]}\\[2ex]
\mathfrak{J} = \mathfrak{K} \left(\dfrac{1}{2}\right) \left(\dfrac{2p+2}{2p+3}\right) \left(\dfrac{2q}{2q-1}\right) \left(\dfrac{2d+1}{2d+2}\right) \left\{\dfrac{2d+5}{2d+1}\right\},\\[2ex]
\mathfrak{H} = \mathfrak{K} \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) \left(\dfrac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right) \left(\dfrac{2q(2q-2)}{(2q-1)(2q-3)}\right) \left(\dfrac{(2d+1)(2d+3)}{(2d+2)(2d+4)}\right) \left\{\dfrac{2d+9}{2d+1}\right\},\\[2ex]
\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right) \left(\dfrac{(2p+2)(2p+4)(2p+6)}{(2p+3)(2p+5)(2p+7)}\right) \left(\dfrac{2q(2q-2)(2q-4)}{(2q-1)(2q-3)(2q-5)}\right) \left(\dfrac{(2d+1)(2d+3)(2d+5)}{(2d+2)(2d+4)(2d+6)}\right) \left\{\dfrac{2d+13}{2d+1}\right\},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{A} = \mathfrak{K} \left(\dfrac{(2p+2)(2p+4)\cdots 2s}{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+1)}\right) \left(\dfrac{(2d+1)(2d+3)\cdots(2p-1)}{(2d+2)(2d+4)\cdots 2p}\right) \left\{\dfrac{2s+1}{2d+1}\right\}.
\end{cases}$$

NB. Die Coefficienten (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.) sind berechnet auf Grund der allgemeinen Formel (16.), Seite 84.

Gehörig zu (Tab. A'. 2) und (Tab. B'. 2).

$$(\gamma)\begin{cases}
(p, q)_d = q(p+1),\\
(p, q)_{d+2} = (q-2)(p+3) + 1\cdot 3,\\
(p, q)_{d+4} = (q-4)(p+5) + 2\cdot 5,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(p, q)_{d+\lambda} = (q-\lambda)(p+\lambda+1) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1).
\end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. A'. 3) und (Tab. B'. 3).

$$(\delta.)\begin{cases}
(d, p)_q = d(p+1),\\
(d+2, p)_q = d(p+3) + 1\cdot 3,\\
(d+4, p)_q = d(p+5) + 2\cdot 5,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(d+\lambda, p)_q = d(p+\lambda+1) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1).
\end{cases}$$

Tabelle B′. — Entwicklung solcher Producte QP, in denen der Index von Q der grössere ist, resp. beide Indices einander gleich sind.

Die Formeln (1.), (2.) gelten für $p \geqq q$, und umfassen daher die Formeln (5.), (6.) als specielle Fälle. Hingegen sind die Formeln (3.), (4.) nur gültig für $p > q$, und bedürfen für $p = q$, wie aus (7.), (8.) ersichtlich, einer gewissen Abänderung.

$$(1.)\qquad Q_p P_q = \mathfrak{K}\, Q_d + \mathfrak{J}\, Q_{d+2} + \mathfrak{H}\, Q_{d+4} + \mathfrak{G}\, Q_{d+6} \cdots\cdots + \mathfrak{A}\, Q_s,$$

$$(2.)\qquad Q_{p,1} P_{q,1} = (p,\, q)_d\, \mathfrak{K}\, Q_d + (p,\, q)_{d+2}\, \mathfrak{J}\, Q_{d+2} + (p,\, q)_{d+4}\, \mathfrak{H}\, Q_{d+4} \cdots\cdots + (p,\, q)_s\, \mathfrak{A}\, Q_s,$$

$$(3.)\qquad Q_{p,1} P_q = \frac{(d,\, p)_q}{d(d+1)}\, \mathfrak{K}\, Q_{d,1} + \frac{(d+2,\, p)_q}{(d+2)(d+3)}\, \mathfrak{J}\, Q_{d+2,1} \cdots\cdots + \frac{(s,\, p)_q}{s(s+1)}\, \mathfrak{A}\, Q_{s,1},$$

$$(4.)\qquad Q_p P_{q,1} = \frac{(d,\, q)_p}{d(d+1)}\, \mathfrak{K}\, Q_{d,1} + \frac{(d+2,\, q)_p}{(d+2)(d+3)}\, \mathfrak{J}\, Q_{d+2,1} \cdots\cdots + \frac{(s,\, q)_p}{s(s+1)}\, \mathfrak{A}\, Q_{s,1};$$

$$(5.)\qquad Q_p P_p = \mathfrak{k}\, Q_0 + \mathfrak{i}\, Q_2 + \mathfrak{h}\, Q_4 \cdots\cdots + \mathfrak{a}\, Q_{2p},$$

$$(6.)\qquad Q_{p,1} P_{p,1} = (p,\, p)_0\, \mathfrak{k}\, Q_0 + (p,\, p)_2\, \mathfrak{i}\, Q_2 \cdots\cdots + (p,\, p)_{2p}\, \mathfrak{a}\, Q_{2p},$$

$$(7.)\qquad Q_{p,1} P_p = \tfrac{1}{2} Q_{0,1} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{k}\, Q_{0,1} + \mathfrak{i}\, Q_{2,1} + \mathfrak{h}\, Q_{4,1} \cdots\cdots + \mathfrak{a}\, Q_{2p,1}],$$

$$(8.)\qquad Q_p P_{p,1} = -\tfrac{1}{2} Q_{0,1} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{k}\, Q_{0,1} + \mathfrak{i}\, Q_{2,1} + \mathfrak{h}\, Q_{4,1} \cdots\cdots + \mathfrak{a}\, Q_{2p,1}].$$

Die Coefficienten vorstehender acht Formeln sind angegeben in (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) und (ζ.).

$$(\beta.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{k} = \dfrac{1}{2p+1}, \\[2mm] \mathfrak{i} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \left(\dfrac{2p(2p+2)}{(2p-1)(2p+1)(2p+3)}\right) \left\{\dfrac{5}{1}\right\}, \\[2mm] \mathfrak{h} = \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\dfrac{(2p-2)\,2p\,(2p+2)(2p+4)}{(2p-3)(2p-1)(2p+1)(2p+3)(2p+5)}\right) \left\{\dfrac{9}{1}\right\}, \\[2mm] \mathfrak{g} = \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \left(\dfrac{(2p-4)(2p-2)\,2p\,(2p+2)(2p+4)(2p+6)}{(2p-5)(2p-3)(2p-1)(2p+1)(2p+3)(2p+5)(2p+7)}\right) \left\{\dfrac{13}{1}\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{a} = f(p) \left(\dfrac{(p+1)(p+2)\cdots 2p}{(2p+1)(2p+3)\cdots(4p-1)}\right). \qquad \text{[Vergl. (19.), Seite 85.]} \end{cases}$$

NB. Man beachte, dass die in diesen beiden Tabellen A' und B' vorhandenen Coefficienten $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}$, $\cdots$ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}$, $\cdots$ $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, abgesehen von der Reihenfolge, identisch sind mit denjenigen Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\cdots$ $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\cdots$ $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{k}$, welche in den beiden vorhergehenden Tabellen A und B sich vorfinden.

Gehörig zu (Tab. A′. 4) und (Tab. B′. 4).

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{cases} (d,\, q)_p = -dq, \\ (d+2,\, q)_p = -d(q-2) + 1\cdot 3, \\ (d+4,\, q)_p = -d(q-4) + 2\cdot 5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (d+\lambda,\, q)_p = -d(q-\lambda) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1). \end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. A′. 6) und (Tab. B′. 6).

$$(\zeta.)\qquad \begin{cases} (p,\, p)_0 = p(p+1), \\ (p,\, p)_2 = (p-2)(p+3) + 1\cdot 3, \\ (p,\, p)_4 = (p-4)(p+5) + 2\cdot 5, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p,\, p)_\lambda = (p-\lambda)(p+\lambda+1) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1). \end{cases}$$

Tabelle C. — Entwicklung der Producte QQ.

Die Formeln (1.), (2.), (3. 4) sind gültig, einerlei ob $p > q$, oder $= q$, oder $< q$ ist, und umfassen demgemäss die Formeln (5.), (6.), (7.) als specielle Fälle.

(1.) $$Q_p\, Q_q = \mathsf{A}\, Q_{s+1} + \mathsf{B}\, Q_{s+3} + \Gamma\, Q_{s+5} + \cdots\cdots \text{ in inf.},$$

(2.) $$Q_{p,1}\, Q_{q,1} = (p,\, q)_{s+1}\, \mathsf{A}\, Q_{s+1} + (p,\, q)_{s+3}\, \mathsf{B}\, Q_{s+3} + (p,\, q)_{s+5}\, \Gamma\, Q_{s+5} + \cdots\cdots \text{ in inf.},$$

(3. 4.) $$Q_{p,1}\, Q_q = \frac{(s+1,\, p)_q}{(s+1)(s+2)}\, \mathsf{A}\, Q_{s+1,1} + \frac{(s+3,\, p)_q}{(s+3)(s+4)}\, \mathsf{B}\, Q_{s+3,1} + \cdots\cdots \text{ in inf.},$$

(5.) $$\left[Q_p\right]^2 = \alpha\, Q_{2p+1} + \beta\, Q_{2p+3} + \gamma\, Q_{2p+5} + \cdots\cdots \text{ in inf.},$$

(6.) $$\left[Q_{p,1}\right]^2 = (p,\, p)_{2p+1}\, \alpha\, Q_{2p+1} + (p,\, p)_{2p+3}\, \beta\, Q_{2p+3} + \cdots\cdots \text{ in inf.},$$

(7.) $$Q_{p,1} Q_p = \tfrac{1}{2}\left[\alpha\, Q_{2p+1,1} + \beta\, Q_{2p+3,1} + \gamma\, Q_{2p+5,1} + \cdots\cdot \text{ in inf.}\right].$$

Die Coefficienten vorstehender sieben Formeln sind angegeben in (α.), (β.), (γ.) und (δ.).

(α.) $$\begin{cases} \mathsf{A} = \dfrac{2}{(2q+1)f(q)}\, \dfrac{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+3)}{(p+1)(p+2)\cdots(s+1)} = 2\, \dfrac{(s+2)f(s+2)}{(p+1)f(p+1)\cdot(q+1)f(q+1)}, \text{ [Vergl. (19.), Seite 85.]} \\ \mathsf{B} = \mathsf{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\dfrac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\dfrac{2s+3}{2s+4}\right)\left\{\dfrac{2s+7}{2s+3}\right\}, \\ \Gamma = \mathsf{A}\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\dfrac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right)\left(\dfrac{(2q+2)(2q+4)}{(2q+3)(2q+5)}\right)\left(\dfrac{(2s+3)(2s+5)}{(2s+4)(2s+6)}\right)\left\{\dfrac{2s+11}{2s+3}\right\}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

(β.) Man erkennt aus den Formeln (α.) auch unmittelbar die Werthe von α, β, γ, $\cdots$, d. i. diejenigen Werthe, welche A, B, Γ, $\cdots$ annehmen für den Specialfall $p = q$.

NB. Die Coefficienten (γ.), (δ.) sind berechnet nach der Formel (16.), Seite 84.

Gehörig zu (Tab. C. 2).

(γ.) $$\begin{cases} (p,\, q)_{s+1} = -(p+1)(q+1), \\ (p,\, q)_{s+3} = -(p+3)(q+3) + 1\cdot 3, \\ (p,\, q)_{s+5} = -(p+5)(q+5) + 2\quad 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (p,\, q)_{s+\lambda} = -(p+\lambda)(q+\lambda) + \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)\lambda. \end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. C. 3, 4).

(δ) $$\begin{cases} s+1,p)_q = (p+1)(s+1), \\ (s+3,p)_q = (p+3)(s+1) + 1\cdot 3, \\ (s+5,p)_q = (p+5)(s+1) + 2\cdot 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (s+\lambda,p)_q = (p+\lambda)(s+1) + \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)\lambda. \end{cases}$$

Tabelle D. — Entwicklung solcher Producte PQ, in denen der Index von P der grössere.

Die hier anzuführenden Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) gelten, wenn $p > q$, nicht aber, wenn $p = q$ ist. Sie besitzen, falls $d = p - q$ *ungerade* ist, folgende Gestalt:

$$(1.)\quad P_p Q_q = Q_p P_q \quad + \mathfrak{L} P_{d-1} + \mathfrak{M} P_{d-3} + \mathfrak{N} P_{d-5} \cdots\cdots + \mathfrak{S} P_2 + \mathfrak{T} P_0,$$

$$(2.)\quad P_{p,1} Q_{q,1} = Q_{p,1} P_{q,1} + (p,q)_{d-1} \mathfrak{L} P_{d-1} + (p,q)_{d-3} \mathfrak{M} P_{d-3} \cdots\cdots + (p,q)_2 \mathfrak{S} P_2 + (p,q)_0 \mathfrak{T} P_0,$$

$$(3.)\quad P_{p,1} Q_q = Q_{p,1} P_q \quad + \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1} + \frac{(d-3,p)_q}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3,1} \cdots + \frac{(2,p)_q}{2\cdot 3} \mathfrak{S} P_{2,1} - \frac{2\sigma}{\varrho},$$

$$(4.)\quad P_p Q_{q,1} = Q_p P_{q,1} \quad + \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1} + \frac{(d-3,q)_p}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3,1} \cdots + \frac{(2,q)_p}{2\cdot 3} \mathfrak{S} P_{2,1} + \frac{2\sigma}{\varrho};$$

und andererseits, wenn $d = p - q$ *gerade* ist, folgende Gestalt:

$$(1.)\quad P_p Q_q = Q_p P_q \quad + \mathfrak{L} P_{d-1} + \mathfrak{M} P_{d-3} + \mathfrak{N} P_{d-5} \cdots\cdots + \mathfrak{V} P_3 + \mathfrak{W} P_1,$$

$$(2.)\quad P_{p,1} Q_{q,1} = Q_{p,1} P_{q,1} + (p,q)_{d-1} \mathfrak{L} P_{d-1} + (p,q)_{d-3} \mathfrak{M} P_{d-3} \cdots\cdots + (p,q)_3 \mathfrak{V} P_3 + (p,q)_1 \mathfrak{W} P_1,$$

$$(3.)\quad P_{p,1} Q_q = Q_{p,1} P_q \quad + \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1} + \frac{(d-3,p)_q}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3,1} \cdots + \frac{(3,p)_q}{3\cdot 4} \mathfrak{V} P_{3,1} + \frac{(1,p)_q}{1\cdot 2} \mathfrak{W} P_{1,1} - \frac{2}{\varrho},$$

$$(4.)\quad P_p Q_{q,1} = Q_p P_{q,1} \quad + \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1} + \frac{(d-3,q)_p}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3,1} \cdots + \frac{(3,q)_p}{3\cdot 4} \mathfrak{V} P_{3,1} + \frac{(1,q)_p}{1\cdot 2} \mathfrak{W} P_{1,1} + \frac{2}{\varrho};$$

wo ϱ zur Abkürzung steht für $\sqrt{1-\sigma^2}$. Die Coefficienten dieser Formeln, welche, jenachdem d *ungerade* oder *gerade* ist, mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, oder mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ bezeichnet sind, besitzen die aus (ε.) ersichtlichen Werthe.

$$(\varepsilon.)\begin{cases}
\mathfrak{L} = \dfrac{2}{(2q+1)f(q)} \dfrac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{d(d+1)\cdots p} = \dfrac{2f(p)}{(2q+1)f(q)\cdot f(d-1)}, \qquad \text{[Vergl. (19.), Seite 85.]} \\
\mathfrak{M} = \mathfrak{L}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2p}{2p-1}\right)\left(\dfrac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\dfrac{2d-1}{2d-2}\right)\left\{\dfrac{2d-5}{2d-1}\right\}, \\
\mathfrak{N} = \mathfrak{L}\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\dfrac{2p(2p-2)}{(2p-1)(2p-3)}\right)\left(\dfrac{(2q+2)(2q+4)}{(2q+3)(2q+5)}\right)\left(\dfrac{(2d-1)(2d-3)}{(2d-2)(2d-4)}\right)\left\{\dfrac{2d-9}{2d-1}\right\}, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\mathfrak{T} = \mathfrak{L}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdots(d-2)}{2\cdot 4\cdots(d-1)}\right)\left(\dfrac{2p(2p-2)\cdots(s+3)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(s+2)}\right)\left(\dfrac{(2q+2)(2q+4)\cdots(s-1)}{(2q+3)(2q+5)\cdots s}\right)\left(\dfrac{(2d-1)(2d-3)\cdots(d+2)}{(2d-2)(2d-4)\cdots(d+1)}\right)\left\{\dfrac{1}{2d-1}\right\}, \\
\mathfrak{W} = \mathfrak{L}\left(\dfrac{1\cdot 3\cdots(d-3)}{2\cdot 4\cdots(d-2)}\right)\left(\dfrac{2p(2p-2)\cdots(s+4)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(s+3)}\right)\left(\dfrac{(2q+2)(2q+4)\cdots(s-2)}{(2q+3)(2q+5)\cdots(s-1)}\right)\left(\dfrac{(2d-1)(2d-3)\cdots(d+3)}{(2d-2)(2d-4)\cdots(d+2)}\right)\left\{\dfrac{3}{2d-1}\right\}.
\end{cases}$$

NB. Die Coefficienten (ζ.), (η.), (ϑ.) sind berechnet nach der Formel (16.), Seite 84.

Gehörig zu (Tab. D. 2).

$$(\zeta.)\begin{cases}
(p,q)_{d-1} = p(q+1), \\
(p,q)_{d-3} = (p-2)(q+3) + 1\cdot 3, \\
(p,q)_{d-5} = (p-4)(q+5) + 2\cdot 5, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
(p,q)_{d-\lambda} = (p-\lambda+1)(q+\lambda) + \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(\lambda-1)\lambda.
\end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. D. 3).

$$(\eta.)\begin{cases}
(d-1,p)_q = dp, \\
(d-3,p)_q = d(p-2) + 1\cdot 3, \\
(d-5,p)_q = d(p-4) + 2\cdot 5, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
(d-\lambda,p)_q = d(p-\lambda+1) + \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(\lambda-1)\lambda.
\end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. D. 4).

$$(\vartheta.)\begin{cases}
(d-1,q)_p = -d(q+1), \\
(d-3,q)_p = -d(q+3) + 1\cdot 3, \\
(d-5,q)_p = -d(q+5) + 2\cdot 5, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
(d-\lambda,q)_p = -d(q+\lambda) + \\
\qquad + \tfrac{1}{2}(\lambda-1)\lambda.
\end{cases}$$

Tabelle D′. — Entwicklung solcher Producte PQ, in denen der Index von P der grössere.

Die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) gelten, wenn $p-q$ *ungerade*, und >0 ist.

$$(1.)\qquad P_p\,Q_q = Q_p\,P_q \quad + \mathfrak{T}\,P_0 + \mathfrak{S}\,P_2 + \mathfrak{R}\,P_4 \cdots\cdots + \mathfrak{L}\,P_{d-1},$$

$$(2.)\qquad P_{p,1}\,Q_{q,1} = Q_{p,1}\,P_{q,1} + (p,q)_0\,\mathfrak{T}\,P_0 + (p,q)_2\,\mathfrak{S}\,P_2 + (p,q)_4\,\mathfrak{R}\,P_4 \cdots\cdots + (p,q)_{d-1}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1},$$

$$(3.)\qquad P_{p,1}\,Q_q = Q_{p,1}\,P_q \quad -\frac{2\sigma}{\varrho} + \frac{(2,p)_q}{2\cdot 3}\,\mathfrak{S}\,P_{2,1} + \frac{(4,p)_q}{4\cdot 5}\,\mathfrak{R}\,P_{4,1} + \cdots\cdots + \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)\,d}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1,1},$$

$$(4.)\qquad P_p\,Q_{q,1} = Q_p\,P_{q,1} \quad + \frac{2\sigma}{\varrho} + \frac{(2,q)_p}{2\cdot 3}\,\mathfrak{S}\,P_{2,1} + \frac{(4,q)_p}{4\cdot 5}\,\mathfrak{R}\,P_{4,1} + \cdots + \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)\,d}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1,1};$$

wo ϱ zur Abkürzung steht für $\sqrt{1-\sigma^2}$. Die Coefficienten dieser vier Formeln sind angegeben in (α.), (β.) und (γ.).

$$(\alpha.)\begin{cases}
\mathfrak{T} = \dfrac{4}{d\,(s+1)}, \\[2mm]
\mathfrak{S} = \mathfrak{T}\left(\dfrac{d-1}{d-2}\right)\left(\dfrac{d+1}{d+2}\right)\left(\dfrac{s}{s-1}\right)\left(\dfrac{s+2}{s+3}\right)\left\{\dfrac{5}{1}\right\}, \\[2mm]
\mathfrak{R} = \mathfrak{T}\left(\dfrac{(d-1)\,(d-3)}{(d-2)\,(d-4)}\right)\left(\dfrac{(d+1)\,(d+3)}{(d+2)\,(d+4)}\right)\left(\dfrac{s\,(s-2)}{(s-1)\,(s-3)}\right)\left(\dfrac{(s+2)\,(s+4)}{(s+3)\,(s+5)}\right)\left\{\dfrac{9}{1}\right\}, \\[2mm]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2mm]
\mathfrak{L} = \mathfrak{T}\left(\dfrac{(d-1)\,(d-3)\cdots 2}{(d-2)\,(d-4)\cdots 1}\right)\left(\dfrac{(d+1)\,(d+3)\cdots(2d-2)}{(d+2)\,(d+4)\cdots(2d-1)}\right)\left(\dfrac{s\,(s-2)\cdots(2q+3)}{(s-1)\,(s-3)\cdots(2q+2)}\right)\left(\dfrac{(s+2)\,(s+4)\cdots(2p-1)}{(s+3)\,(s+5)\cdots 2p}\right)\left\{\dfrac{2d-1}{1}\right\}.
\end{cases}$$

NB. Man beachte, dass diese Coefficienten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, $\cdots$ $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, abgesehen von der Reihenfolge, identisch sind mit denjenigen Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, welche in der vorhergehenden Tabelle D. sich vorfinden.

NB. Die Coefficienten (β.), (γ.) sind berechnet nach der Formel (16.), Seite 84.

Gehörig zu (Tab. D′. 3).

$$(\beta.)\begin{cases}
(0,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1), \\
(2,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 1\cdot 3, \\
(4,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 2\cdot 5, \\
\cdots\cdots\cdots \\
(\lambda,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + \tfrac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda+1).
\end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. D′. 4).

$$(\gamma.)\begin{cases}
(0,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1), \\
(2,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 1\cdot 3, \\
(4,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 2\cdot 5, \\
\cdots\cdots\cdots \\
(\lambda,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + \tfrac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda+1).
\end{cases}$$

Tabelle D″. — Entwicklung solcher Producte PQ, in denen der Index von P der grössere.

Die nachstehenden Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) gelten, wenn $p-q$ *gerade*, und >0 ist.

$$(1.)\quad P_p\,Q_q = Q_p\,P_q \quad + \mathfrak{W}\,P_1 + \mathfrak{V}\,P_3 + \mathfrak{U}\,P_5 \cdots\cdots + \mathfrak{L}\,P_{d-1},$$

$$(2.)\quad P_{p,1}\,Q_{q,1} = Q_{p,1}\,P_{q,1} + (p,q)_1\,\mathfrak{W}\,P_1 + (p,q)_3\,\mathfrak{V}\,P_3 \cdots\cdots + (p,q)_{d-1}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1},$$

$$(3.)\quad P_{p,1}\,Q_q = Q_{p,1}\,P_q \quad - \frac{2}{\varrho} + \frac{(1,\,p)_q}{1\cdot 2}\,\mathfrak{W}\,P_{1,1} + \frac{(3,\,p)_q}{3\cdot 4}\,\mathfrak{V}\,P_{3,1} + \cdots\cdots + \frac{(d-1,\,p)_q}{(d-1)\,d}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1,1},$$

$$(4.)\quad P_p\,Q_{q,1} = Q_p\,P_{q,1} \quad + \frac{2}{\varrho} + \frac{(1,\,q)_p}{1\cdot 2}\,\mathfrak{W}\,P_{1,1} + \frac{(3,\,q)_p}{3\cdot 4}\,\mathfrak{V}\,P_{3,1} + \cdots\cdots + \frac{(d-1,\,q)_p}{(d-1)\,d}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1,1};$$

wo ϱ zur Abkürzung steht für $\sqrt{1-\sigma^2}$. Die Coefficienten dieser vier Formeln sind angegeben in (δ.), (ε.) und (ζ.).

$$(\delta.)\begin{cases} \mathfrak{W} = \dfrac{3\cdot 4\cdot d\,(s+1)}{(d-1)\,(d+1)\,s\,(s+2)}, \\[2ex] \mathfrak{V} = \mathfrak{W}\,\left(\dfrac{d-2}{d-3}\right)\left(\dfrac{d+2}{d+3}\right)\left(\dfrac{s-1}{s-2}\right)\left(\dfrac{s+3}{s+4}\right)\left\{\dfrac{7}{3}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{U} = \mathfrak{W}\,\left(\dfrac{(d-2)\,(d-4)}{(d-3)\,(d-5)}\right)\left(\dfrac{(d+2)\,(d+4)}{(d+3)\,(d+5)}\right)\left(\dfrac{(s-1)\,(s-3)}{(s-2)\,(s-4)}\right)\left(\dfrac{(s+3)\,(s+5)}{(s+4)\,(s+6)}\right)\left\{\dfrac{11}{3}\right\}, \\[2ex] \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\[2ex] \mathfrak{L} = \mathfrak{W}\,\left(\dfrac{(d-2)(d-4)\cdots 2}{(d-3)\,(d-5)\cdots 1}\right)\left(\dfrac{(d+2)\,(d+4)\cdots(2\,d-2)}{(d+3)\,(d+5)\cdots(2\,d-1)}\right)\left(\dfrac{(s-1)\,(s-3)\cdots(2\,q+3)}{(s-2)\,(s-4)\cdots(2\,q+2)}\right)\left(\dfrac{(s+3)\,(s+5)\cdots(2\,p-1)}{(s+4)\,(s+6)\cdots 2\,p}\right)\left\{\dfrac{2\,d-1}{3}\right\}. \end{cases}$$

NB. Man beachte, dass diese Coefficienten $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$, $\cdots$ $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, abgesehen von der Reihenfolge, identisch sind mit denjenigen Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, welche sich vorfinden in der Tabelle D.

NB. Die Coefficienten (ε.), (ζ.) sind berechnet nach der Formel (16.), Seite 84.

Gehörig zu (Tab. D″. 3).

$$(\varepsilon.)\begin{cases} (1,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 1\cdot 1, \\ (3,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 2\cdot 3, \\ (5,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 3\cdot 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (\lambda,\,p)_q = \tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + \tfrac{1}{2}\,(\lambda+1)\,\lambda. \end{cases}$$

Gehörig zu (Tab. D″. 4).

$$(\zeta.)\begin{cases} (1,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 1\cdot 1, \\ (3,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 2\cdot 3, \\ (5,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + 3\cdot 5, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (\lambda,\,q)_p = -\tfrac{1}{2}\,d\,(s+1) + \tfrac{1}{2}\,(\lambda+1)\,\lambda. \end{cases}$$

§ 1.

Aufstellung einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung, welcher das Product zweier Kugelfunctionen Genüge leistet.

Es sei:

$$Y = UV, \tag{1.}$$

wo U, V definirt sein mögen

durch die Gleichungen: oder (was dasselbe) durch*):

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right) + p(p+1)U = 0, \qquad \frac{\partial (fU')}{\partial \sigma} + AU = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right) + q(q+1)V = 0, \qquad \frac{\partial (fV')}{\partial \sigma} + BV = 0. \tag{2.}$$

Zur Abkürzung mögen nämlich die Constanten $p(p+1)$ und $q(q+1)$ und die Function $(1-\sigma^2)$ respective mit A, B und f bezeichnet sein. *Dabei sei vorausgesetzt, dass p und q irgend welche Zahlen aus der Reihe* 0, 1, 2, 3, 4 ···· *repräsentiren.* — Aus (1.) ergiebt sich sofort:

$$fY' = U \cdot fV' + V \cdot fU',$$

und hieraus folgt durch nochmalige Differentiation und mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.) und (1.):

$$\frac{\partial (fY')}{\partial \sigma} = -(A+B)Y + 2Z, \tag{3.}$$

wo Z den Werth hat:

$$Z = fU'V'. \tag{4.}$$

Aus (4.) folgt: $fZ = fU' \cdot fV'$, und hieraus durch Differentiation, mit Rücksicht auf (2.):

$$\frac{\partial (fZ)}{\partial \sigma} = -fU' \cdot BV - fV' \cdot AU, \tag{5.}$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 (fZ)}{\partial \sigma^2} = 2ABY - (A+B)Z. \tag{6.}$$

Die gesuchte Differentialgleichung für Y wird aus (3.) und (6.) durch Elimination von Z erhalten werden, mithin lauten:

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\left(f\frac{\partial (fY')}{\partial \sigma}\right) + (A+B)\frac{\partial (2fY' + f'Y)}{\partial \sigma} + (A-B)^2 Y = 0, \tag{7.a}$$

oder, falls man beachtet, dass $f = 1 - \sigma^2$, mithin $f' = -2\sigma$ ist:

*) Die Accente deuten überall Differentiationen an nach der Variablen σ.

$$(7.^b)\qquad \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(f\frac{\partial(fY')}{\partial\sigma}\right)}_{E} + 2(A+B)\frac{\partial(fY'-\sigma Y)}{\partial\sigma} + (A-B)^2 Y = 0 .$$

Das erste Glied E dieser Gleichung ist, wie man leicht erkennt, folgender Transformation fähig:

$$E = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2}\right) - 2\frac{\partial(fY')}{\partial\sigma} - 2\sigma\frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2};$$

und durch Substitution dieses Werthes in (7.^b) ergiebt sich:

$$(7.^c)\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2}\right) + 2(A+B-1)\frac{\partial(fY')}{\partial\sigma} + [(A-B)^2 - 2(A+B)]\,Y = 2(A+B)\sigma Y' + 2\sigma\frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2},$$

oder, kürzer geschrieben:

$$(7.^d)\qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2}\right) + 2(K-1)\frac{\partial(fY')}{\partial\sigma} + HY = 2\sigma\left(KY' + \frac{\partial^2(fY')}{\partial\sigma^2}\right),$$

wo alsdann K, H folgende Constanten bezeichnen:

$$K = A + B = p(p+1) + q(q+1),$$
$$H = (A-B)^2 - 2(A+B) = [p(p+1) - q(q+1)]^2 - 2[p(p+1) + q(q+1)];$$

während f zur Abkürzung steht für $(1-\sigma^2)$.

Nach ihrer Definition (2.) sind U und V *Kugelfunctionen.* Mithin ist $Y = UV$ (1.) das Product zweier Kugelfunctionen, während andererseits der Ausdruck $Z = fU'V' = (1-\sigma^2)U'V'$ (4.) das Product zweier *abgeleiteten* Kugelfunctionen repräsentirt. Eine Differentialgleichung für dieses letztere Product Z kann ebenfalls leicht erhalten werden, nämlich durch Elimination von Y aus (3.) und (6.). Sie lautet:

$$(8.^a)\qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\frac{\partial^2(fZ)}{\partial\sigma^2}\right) + (A+B)\frac{\partial(2fZ' + f'Z)}{\partial\sigma} + (A-B)^2 Z = 0,$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

$$(8.^b)\qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\frac{\partial^2(fZ)}{\partial\sigma^2}\right) + (A+B)\left(\frac{\partial(fZ')}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2(fZ)}{\partial\sigma^2}\right) + (A-B)^2 Z = 0;$$

wobei beachtenswerth, dass die Gleichungen (7.^a) und (8.^a) nur in ihren *ersten* Gliedern sich unterscheiden*).

---

*) Man kann die Differentialgleichungen (7.^a, ^b, ^c, ^d) und (8.^a, ^b) in folgende Form bringen:

$$(1-\sigma^2)^2 Y'''' - 10\sigma(1-\sigma^2)Y''' + [2(A+B)(1-\sigma^2) - 8(1-3\sigma^2)]\,Y'' -$$
$$- 6(A+B-2)\sigma Y' + [(A-B)^2 - 2(A+B)]\,Y = 0,$$
$$(1-\sigma^2)^2 Z'''' - 10\sigma(1-\sigma^2)Z''' + [2(A+B)(1-\sigma^2) - 8(1-3\sigma^2) - 4]\,Z'' -$$
$$- 6(A+B-2)\sigma Z' + [(A-B)^2 - 2(A+B)]\,Z = 0;$$

woraus hervorgeht, dass die beiden Gleichungen unter einander identisch sind, abgesehen vom Coefficienten des dritten Gliedes. Denn dieser Coefficient ist in der zweiten Gleichung um 4 kleiner als in der ersten.

Die Kugelfunctionen U und V, welche den beiden Differentialgleichungen (2.) Genüge leisten, sind respective $P_p(\sigma)$, $Q_p(\sigma)$ und $P_q(\sigma)$, $Q_q(\sigma)$; woraus folgt, *dass die vier particularen Integrale Y der von uns aufgestellten Differentialgleichung vierter Ordnung* (7.[a, b, c, d]) *dargestellt sind durch die vier Producte:*

$$(9.) \qquad P_p P_q\,, \qquad Q_p Q_q\,, \qquad Q_p P_q\,, \qquad P_p Q_q\,.$$

Der Specialfall: $p = q$. — Wiederholt man die eben angestellten Deductionen für den Specialfall $p = q$, mithin $A = B$, so ergeben sich gewisse Vereinfachungen. Denn die Gleichungen (3.), (5.) nehmen in diesem Falle die Gestalt an:

$$\frac{\partial (f Y')}{\partial \sigma} = -2 A Y + 2 Z,$$

$$\frac{\partial (f Z)}{\partial \sigma} = -A f Y';$$

woraus durch Elimination von Z folgt:

$$(10.) \qquad \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(f \frac{\partial (f Y')}{\partial \sigma}\right) + 4 A (f Y' - \sigma Y) = 0\,.$$

Man erhält also in diesem Specialfall $p = q$ für das Product $Y = UV$ nicht mehr eine Differentialgleichung *vierter* Ordnung, sondern eine Differentialgleichung *dritter* Ordnung, womit in Einklang steht, dass die in (9.) angegebenen *vier* particularen Integrale für $p = q$ sich auf *drei* reduciren. — Uebrigens kann man diese Gleichung dritter Ordnung (10.) nicht direct aus der ursprünglichen Gleichung vierter Ordnung (7.[a, b, c, d]) ableiten. Denn setzt man z. B. in (7.[b]) die Constanten A und B einander gleich, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0\,, \qquad \text{d. i.} \qquad \Omega = \text{Const.}$$

Diese Gleichung $\Omega = \text{Const.}$ verwandelt sich aber in (10.) erst dann, wenn man die Integrationsconstante Null setzt.

§ 1.[a]

Aufstellung einer linearen Differentialgleichung, welcher die n^{te} Potenz einer Kugelfunction Genüge leistet.

Sind U_1, U_2, $\cdots$ U_n irgend welche Lösungen der in (2.) genannten Differentialgleichung

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial (f U')}{\partial \sigma} + A U = 0\,,$$

so ergiebt sich, wie soeben gezeigt wurde, für das Product $Y = U_1 U_2$ eine *lineare Differentialgleichung dritter Ordnung.* Und ebenso ergiebt sich alsdann, wie sogleich dargethan werden soll, für das Product $Y = U_1 U_2 U_3 \cdots U_n$ eine gewisse *lineare Differentialgleichung* $(n+1)^{ter}$ *Ordnung.*

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $U_1, U_2, \cdots U_n$ alle unter einander identisch, etwa $= U$ sind, mithin

$$(\beta.) \qquad Y = U^n,$$

und setzen zur Abkürzung:

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} fY' = nU^{n-1} fU' &= \Phi_1, \\ n(n-1)\,U^{n-2}(fU')^2 &= \Phi_2, \\ n(n-1)(n-2)\,U^{n-3}(fU')^3 &= \Phi_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\, U^0(fU')^n &= \Phi_n. \end{aligned}$$

Die erste dieser Formeln lässt sich so schreiben:

$$(\delta_0.) \qquad \frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \frac{\Phi_1}{f},\ ^{*)}$$

oder auch so:

$$\Phi_1 = nU^{n-1}(fU');$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach σ, und mit Rücksicht auf $(\alpha.)$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} = nU^{n-1}(-AU) + n(n-1)\,U^{n-2}\,U'(fU'),$$

oder, mit Hinblick auf die Formeln $(\beta.)$, $(\gamma.)$:

$$(\delta_1.) \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} + nAY = \frac{\Phi_2}{f}.$$

In analoger Weise ergiebt sich durch Differentiation der *zweiten* Formel $(\gamma.)$:

$$(\delta_2.) \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma} + 2(n-1)A\Phi_1 = \frac{\Phi_3}{f};$$

und man gelangt in solcher Weise durch Differentiation der Gleichungen $(\gamma.)$ d. i. durch Aufstellung der (zum Theil schon angegebenen) Formeln $(\delta_0.)$, $(\delta_1.)$, $(\delta_2.)$, $(\delta_3.)$, $\cdots$ $(\delta_n.)$ zu folgendem übersichtlichen System:

---

*) Die Differentiationen nach σ sollen *promiscue* bald durch Accente, bald durch das reguläre Zeichen $\frac{\partial}{\partial \sigma}$, bald auch durch ein blosses ∂ angedeutet werden.

$$(\varepsilon.)\quad\begin{aligned}
&f[\partial Y + 0] = \Phi_1,\\
&f[\partial \Phi_1 + 1\cdot n A Y] = \Phi_2,\\
&f[\partial \Phi_2 + 2(n-1) A \Phi_1] = \Phi_3,\\
&f[\partial \Phi_3 + 3(n-2) A \Phi_2] = \Phi_4,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&f[\partial \Phi_{n-1} + (n-1) 2 A \Phi_{n-2}] = \Phi_n,\\
&\partial \Phi_n + n\cdot 1\cdot A \Phi_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

Hier ist, wie auch weiterhin in den Formeln (A.), (B.), (C.), (D.), das ∂ zur Abkürzung gesetzt für $\frac{\partial}{\partial \sigma}$.

wo der *erste* Factor des vor A stehenden Zahlenproductes von 1 bis n steigt, während der *zweite* von n bis 1 sinkt. Eliminirt man aus diesen $(n+1)$ Gleichungen $(\varepsilon.)$ die n auxiliären Grössen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n$, so erhält man die gesuchte *Differentialgleichung für Y.*

Um die Resultate, zu denen man in solcher Weise gelangt, übersichtlich auf einander folgen zu lassen, schreiben wir zunächst die Differentialgleichung $(\alpha.)$ von Neuem hin:

$$(\text{A.})\qquad \partial f \partial U + A U = 0, \qquad \left(\text{wo } \partial \text{ steht für } \frac{\partial}{\partial \sigma}\right),$$

welcher genügt wird durch die Kugelfunction p^{ter} Ordnung, d. i. durch $U = P_p(\sigma)$ oder $U = Q_p(\sigma)$.

Setzen wir nun in $(\varepsilon.)$ die Zahl $n = 2$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
f[\partial Y + 0] &= \Phi_1,\\
f[\partial \Phi_1 + 1\cdot 2 A Y] &= \Phi_2,\\
\partial \Phi_2 + 2\cdot 1\, A \Phi_1 &= 0,
\end{aligned}$$

woraus durch Elimination von Φ_1, Φ_2 folgt:

$$(\text{B.})\qquad \partial f \partial f \partial Y + A(2\partial f Y + 2 f \partial Y) = 0.$$

Diese Formel repräsentirt also diejenige Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher genügt wird durch $Y = U^2$, d. i. durch die zweite Potenz der Kugelfunction. In der That bemerkt man, dass diese Gleichung (B.) identisch ist mit der schon früher in (10.) aufgestellten.

Setzt man ferner in $(\varepsilon.)$ die Zahl $n = 3$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f[\partial Y + 0] &= \Phi_1,\\
f[\partial \Phi_1 + 1\cdot 3 A Y] &= \Phi_2,\\
f[\partial \Phi_2 + 2\cdot 2 A \Phi_1] &= \Phi_3,\\
\partial \Phi_3 + 3\cdot 1 A \Phi_2 &= 0;
\end{aligned}$$

woraus durch Elimination der Φ_1, Φ_2, Φ_3 sich ergiebt:

$$(\text{C.})\qquad \partial f \partial f \partial f \partial Y + A(3\partial f \partial f Y + 4\partial f f \partial Y + 3 f \partial f \partial Y) + A^2(9 f Y) = 0.$$

Diese letzte Formel repräsentirt mithin diejenige Differentialgleichung vierter Ordnung, welcher genügt wird durch $Y = U^3$, d. i. durch die dritte Potenz der Kugelfunction.

Ferner erhält man aus (ε.) für den Fall $n = 4$ die fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned} f[\partial Y + 0] &= \Phi_1, \\ f[\partial \Phi_1 + 1 \cdot 4 A Y] &= \Phi_2, \\ f[\partial \Phi_2 + 2 \cdot 3 A \Phi_1] &= \Phi_3, \\ f[\partial \Phi_3 + 3 \cdot 2 A \Phi_2] &= \Phi_4, \\ \partial \Phi_4 + 4 \cdot 1 A \Phi_3 &= 0, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 sich ergiebt:

$$\begin{aligned} \text{(D.)} \quad & \partial f \partial f \partial f \partial f \partial Y + A(4 \partial f \partial f \partial f Y + 6 \partial f \partial f f \partial Y + 6 \partial f f \partial f \partial Y + 4 f \partial f \partial f \partial Y) + \\ & + A^2 (24 \partial f f Y + 16 f \partial f Y + 24 f f \partial Y) = 0. \end{aligned}$$

Dies also ist die Differentialgleichung fünfter Ordnung, welcher genügt wird durch $Y = U^4$, d. i. durch die vierte Potenz der Kugelfunction.

Schliesslich übersieht man leicht, dass diese Differentialgleichungen (B.), (C.), (D.) nicht nur durch $Y = U^2$, $Y = U^3$ und $Y = U^4$, sondern auch dann befriedigt werden, wenn man $Y = U_1 U_2$, resp. $Y = U_1 U_2 U_3$, resp. $Y = U_1 U_2 U_3 U_4$ setzt, wo U_1, U_2, U_3 und U_4 ganz *beliebige* Lösungen der Gleichung (A.), d. i. ganz beliebige Kugelfunctionen p^{ter} Ordnung (erster oder zweiter Art) sein können.

Bemerkung. — Setzt man*) in den Gleichungen (A.), (B.), (C.), (D.) das Argument $\sigma = \frac{\omega}{p}$, und lässt man sodann $p = \infty$ werden, so erhält man:

$$\text{(A.}^b\text{)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} + U = 0,$$

$$\text{(B.}^b\text{)} \qquad \frac{\partial^3 Y}{\partial \omega^3} + 4 \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 0,$$

$$\text{(C.}^b\text{)} \qquad \frac{\partial^4 Y}{\partial \omega^4} + 10 \frac{\partial^2 Y}{\partial \omega^2} + 9 Y = 0,$$

$$\text{(D.}^b\text{)} \qquad \frac{\partial^5 Y}{\partial \omega^5} + 20 \frac{\partial^3 Y}{\partial \omega^3} + 64 \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 0.$$

Durch das angegebene Verfahren verwandeln sich also, wie aus (A.^{b}) hervorgeht, die *Kugelfunctionen* U in die *trigonometrischen* Functionen $\sin \omega$ und $\cos \omega$. Und die particularen Integrale der Gleichung (B.^{b}) sind daher $\sin^2 \omega$, $(\sin \omega \cdot \cos \omega)$ und $\cos^2 \omega$.

*) Dabei ist wohl zu beachten, dass in (A.), (B.), (C.), (D.) die Zeichen A, f, ∂ stehen respective für $p(p+1)$, $(1 - \sigma^2)$ und $\frac{\partial}{\partial \sigma}$.

Zweite Bemerkung. — Setzt man in (A.), (B.), (C.), (D.) das Argument $\sigma = \cos\frac{\eta}{p}$, und lässt sodann $p = \infty$ werden, so erhält man:

$$\text{(A.}^c\text{)} \qquad \frac{\partial}{\eta\,\partial\eta}\left(\frac{\eta\,\partial U}{\partial\eta}\right) + U = 0,$$

$$\text{(B.}^c\text{)} \qquad \frac{\partial}{\eta\,\partial\eta}\left\{\frac{\eta\,\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta\,\partial Y}{\partial\eta}\right)\right\} + 4\,\frac{\partial(\eta\,Y)}{\partial\eta} = 0,$$

etc. etc. etc.

Durch dieses Verfahren verwandeln sich also, wie aus (A.^{c}) ersichtlich, die *Kugelfunctionen* U in die *Cylinderfunctionen* $J^0(\eta)$ und $Y^0(\eta)$. Und die particularen Integrale der Gleichung (B.^{c}) werden daher sein: $[J^0(\eta)]^2$, $[J^0(\eta)\,Y^0(\eta)]$ und $[Y^0(\eta)]^2$.

§ 2.

Integration der aufgestellten Differentialgleichung mittelst einer nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwicklung.

Die im Vorhergehenden aufgestellte Differentialgleichung (7.^{d}):

$$\text{(11.)} \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(f\,\frac{\partial^2(f\,Y')}{\partial\sigma^2}\right) + 2(K-1)\,\frac{\partial(f\,Y')}{\partial\sigma} + H\,Y = 2\,\sigma\left(K\,Y' + \frac{\partial^2(f\,Y')}{\partial\sigma^2}\right)$$

wird erfüllt durch $Y = U\,V$, falls U und V den Gleichungen (2.) Genüge leisten. Letzteres aber ist der Fall, wenn man für U eine der Functionen $P_p(\sigma)$, $Q_p(\sigma)$, und für V eine der Functionen $P_q(\sigma)$, $Q_q(\sigma)$ nimmt. Demgemäss besitzt die Differentialgleichung (11.) die vier particularen Integrale:

$$\text{(12.)} \qquad P_p\,P_q, \qquad Q_p\,Q_q, \qquad Q_p\,P_q, \qquad P_p\,Q_q,$$

und das vollständige Integral:

$$\text{(13.)} \qquad Y = A\,P_p\,P_q + B\,Q_p\,Q_q + C\,Q_p\,P_q + D\,P_p\,Q_q,$$

wo A, B, C, D willkürliche von σ unabhängige Grössen sind.

Wir werden nun zeigen, dass man die Gleichung (11.) ***durch Reihen*** *integriren kann, die nach den Kugelfunctionen fortschreiten.* ***Diese Reihen*** *werden alsdann benutzt werden können, um jedes der Producte* (12.) ***auf lineare*** *Weise durch Kugelfunctionen darzustellen.*

Substituirt man in (11.) für Y eine Reihe von der Form:

$$\text{(14.)} \qquad Y = A_0\,P_{\nu_0} + A_2\,P_{\nu_2} + A_4\,P_{\nu_4} + \cdots,$$

so gelangt man mit Rücksicht auf die Gleichungen*):

*) Ebenso wie in (11.) steht auch in (15.) das f zur Abkürzung für $(1-\sigma^2)$; so dass also $f' = -2\,\sigma$ und $f'' = -2$ ist.

$$(15.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial (f P_\nu')}{\partial \sigma} &= -\nu(\nu+1)P_\nu, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(f\frac{\partial^2 (f P_\nu')}{\partial \sigma^2}\right) &= +[\nu(\nu+1)]^2 P_\nu, \\ \frac{\partial^2 (f P_\nu')}{\partial \sigma^2} &= -\nu(\nu+1)P_\nu', \end{aligned}$$

sowie unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(16.^a)\quad [\nu_0(\nu_0+1)]^2 - 2(K-1)\nu_0(\nu_0+1) + H = N_0, \qquad \nu_0(\nu_0+1) - K = L_0,$$

$$(16.^b)\quad [\nu_2(\nu_2+1)]^2 - 2(K-1)\nu_2(\nu_2+1) + H = N_2, \qquad \nu_2(\nu_2+1) - K = L_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

zu folgender Formel:

$$(17.)\quad \begin{aligned} 0 = &+[N_0 A_0 P_{\nu_0} + N_2 A_2 P_{\nu_2} + N_4 A_4 P_{\nu_4} + \cdots] \\ &+ 2\sigma[L_0 A_0 P_{\nu_0}' + L_2 A_2 P_{\nu_2}' + L_4 A_4 P_{\nu_4}' + \cdots], \end{aligned}$$

oder, falls man die P_ν' vermittelst der recurrenten Relation [(C.), Seite 61]

$$(18.)\quad \sigma P_\nu' = \nu P_\nu + P_{\nu-1}' \;{}^{*})$$

auf die $P_{\nu-1}'$ reducirt:

$$(19.)\quad \begin{aligned} 0 = &[(N_0 + 2\nu_0 L_0) A_0 P_{\nu_0} + (N_2 + 2\nu_2 L_2) A_2 P_{\nu_2} + \cdots] \\ &+ 2[L_0 A_0 P_{\nu_0-1}' + L_2 A_2 P_{\nu_2-1}' + \cdots], \end{aligned}$$

oder, falls man für die P_ν' ihre Entwicklungen [(2.$^{a, b}$), Seite 61]

$$(20.)\quad P_\nu' = (2\nu-1)P_{\nu-1} + (2\nu-5)P_{\nu-3} + (2\nu-9)P_{\nu-5} + \cdots$$

substituirt:

$$(21.)\quad \begin{aligned} 0 = (N_0+2\nu_0L_0)A_0P_{\nu_0} &+ (N_2+2\nu_2L_2)A_2P_{\nu_2} + (N_4+2\nu_4L_4)A_4P_{\nu_4} + (N_6+2\nu_6L_6)A_6P_{\nu_6} + \cdots \\ &+ 2L_0A_0[(2\nu_0-3)P_{\nu_0-2} + (2\nu_0-7)P_{\nu_0-4} + (2\nu_0-11)P_{\nu_0-6} + \cdots] \\ &+ 2L_2A_2[(2\nu_2-3)P_{\nu_2-2} + (2\nu_2-7)P_{\nu_2-4} + \cdots] \\ &+ 2L_4A_4[(2\nu_4-3)P_{\nu_4-2} + \cdots] \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Formel aber geschieht Genüge, wenn man setzt:

$$(22.)\quad \begin{aligned} \nu_2 &= \nu_0 - 2, \\ \nu_4 &= \nu_2 - 2 = \nu_0 - 4, \\ \nu_6 &= \nu_4 - 2 = \nu_2 - 4 = \nu_0 - 6, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

---

*) Uebrigens kann man statt der Relation (18.) auch folgende anwenden:

$$\sigma P_\nu' = -(\nu+1)P_\nu + P_{\nu+1}' \qquad \text{[d. i. die recurrente Relation (D.), Seite 61].}$$

Die Resultate, zu denen die Betrachtungen des gegenwärtigen § führen, erleiden dadurch keine Aenderung. Denn man erhält in diesem Fall statt (21.) eine etwas andere Formel, welche aber durch die Relationen (22.), (23.$^{a, b, \cdots}$) ebenfalls erfüllt wird.

und gleichzeitig setzt:

$$(23.^a)\qquad 0 = (N_0 + 2\nu_0 L_0),$$
$$(23.^b)\qquad 0 = (N_2 + 2\nu_2 L_2) A_2 + 2(2\nu_2 + 1) L_0 A_0,$$
$$(23.^c)\qquad 0 = (N_4 + 2\nu_4 L_4) A_4 + 2(2\nu_4 + 1)(L_0 A_0 + L_2 A_2),$$
$$(23.^d)\qquad 0 = (N_6 + 2\nu_6 L_6) A_6 + 2(2\nu_6 + 1)(L_0 A_0 + L_2 A_2 + L_4 A_4),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Durch die Gleichung (23.[a]), *in welcher für N_0, L_0 die Werthe* (16.[a]) *substituirt zu denken sind, bestimmt sich die Zahl ν_0. Sodann bestimmen sich die folgenden Zahlen ν_2, ν_4, ν_6, $\cdots$ aus* (22.). *Und endlich bestimmen sich alsdann die constanten Coefficienten A_0, A_2, A_4, A_6, $\cdots$, abgesehen vom ersten, der willkürlich bleibt, vermittelst der Gleichungen* (23.[b, c, d, ...]). Uebrigens kann man diesen Gleichungen (23.[b, c, d, ...]) die einfachere Gestalt geben:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} a_2 A_2 &= b_0 A_0, \\ a_4 A_4 &= b_2 A_2, \\ a_6 A_6 &= b_4 A_4, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo die a, b die Werthe haben:

$$(25.)\qquad \begin{aligned} a_\lambda &= \frac{N_\lambda + 2\nu_\lambda L_\lambda}{2\nu_\lambda + 1}, \\ b_\lambda &= a_\lambda - 2L_\lambda = \frac{N_\lambda - 2(\nu_\lambda + 1) L_\lambda}{2\nu_\lambda + 1}. \end{aligned}$$

Substituirt man hier für N_λ, L_λ ihre eigentlichen Bedeutungen (16.[a, b, ..]), so erhält man, indem man den Index λ für den Augenblick unterdrückt:

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} (2\nu+1)a &= [\nu(\nu+1)]^2 - 2(K-1)\nu(\nu+1) + H + 2\nu[\nu(\nu+1) - K], \\ (2\nu+1)b &= [\nu(\nu+1)]^2 - 2(K-1)\nu(\nu+1) + H - 2(\nu+1)[\nu(\nu+1) - K], \end{aligned}$$

oder, wenn man den ersten Ausdruck nach Potenzen von $\nu + 1$, den zweiten nach Potenzen von ν ordnet:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} (2\nu+1)a &= (\nu+1)^4 - 2(K+\tfrac{1}{2})(\nu+1)^2 + (H+2K), \\ (2\nu+1)b &= \nu^4 - 2(K+\tfrac{1}{2})\,\nu^2 + (H+2K), \end{aligned}$$

oder, falls man in Factoren zerlegt:

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} (2\nu+1)a &= [(\nu+1)^2 - (\tfrac{1}{2}+K+R)][(\nu+1)^2 - (\tfrac{1}{2}+K-R)], \\ (2\nu+1)b &= [\nu^2 - (\tfrac{1}{2}+K+R)][\nu^2 - (\tfrac{1}{2}+K-R)]. \end{aligned}$$

Hier hat R den Werth:

$$(\delta.)\qquad R = \sqrt{(K-\tfrac{1}{2})^2 - H},$$

oder, falls man für K, H ihre eigentlichen Bedeutungen [Seite 95 bei (7.[d])] substituirt:

§ 3.

Weitere Behandlung der gefundenen vier particularen Integrale.

Die gefundenen vier particularen Integrale mögen, entsprechend den vier Wurzeln (28.), mit

$$(30.)\quad \begin{array}{ll} \text{I.}\quad J_{p+q} = J_s, & \text{II.}\quad J_{-(p+q+2)} = J_{-(s+2)}, \\ \text{III.}\quad J_{q-p-1} = J_{-(d+1)}, & \text{IV.}\quad J_{p-q-1} = J_{d-1} \end{array}$$

bezeichnet werden, wo

$$(31.)\quad \begin{array}{c} p+q=s, \\ p-q=d \end{array}$$

gesetzt ist. Dabei mag angenommen werden, dass von den beiden Zahlen p und q die *kleinere* mit q bezeichnet sei:

$$(32.)\quad p > q.$$

Um nun die Ausdrücke der Integrale (30.) *in extenso* angeben zu können, sei bemerkt, dass die Formeln (26.) mit Rücksicht auf (31.) sich so darstellen lassen:

$$(33.)\quad a_\lambda = \frac{(\nu_\lambda+s+2)(\nu_\lambda-s)(\nu_\lambda+d+1)(\nu_\lambda-d+1)}{2\nu_\lambda+1}, \qquad b_\lambda = \frac{(\nu_\lambda+s+1)(\nu_\lambda-s-1)(\nu_\lambda+d)(\nu_\lambda-d)}{2\nu_\lambda+1};$$

hieraus aber folgt, wenn man $\lambda = 0, 2, 4, 6, \cdots$, mithin $\nu_\lambda = \nu_0, \nu_2, \nu_4, \nu_6, \cdots$ oder [was dasselbe, vergl. (22.)] $= \nu_0, \nu_0 - 2, \nu_0 - 4, \nu_0 - 6, \cdots$ setzt:

$$a_0 = 0, {}^{*})$$

$$(34.)\quad \begin{array}{ll} a_2 = \dfrac{(\nu_0+s)(\nu_0-s-2)(\nu_0+d-1)(\nu_0-d-1)}{2\nu_0-3}, & b_0 = \dfrac{(\nu_0+s+1)(\nu_0-s-1)(\nu_0+d)(\nu_0-d)}{2\nu_0+1}, \\ a_4 = \dfrac{(\nu_0+s-2)(\nu_0-s-4)(\nu_0+d-3)(\nu_0-d-3)}{2\nu_0-7}, & b_2 = \dfrac{(\nu_0+s-1)(\nu_0-s-3)(\nu_0+d-2)(\nu_0-d-2)}{2\nu_0-3}, \\ a_6 = \dfrac{(\nu_0+s-4)(\nu_0-s-6)(\nu_0+d-5)(\nu_0-d-5)}{2\nu_0-11}, & b_4 = \dfrac{(\nu_0+s-3)(\nu_0-s-5)(\nu_0+d-4)(\nu_0-d-4)}{2\nu_0-7}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

wo absichtlich, um die Constanten der Formel (29.) bequemer bilden zu können, a_2 mit b_0, a_4 mit b_2, u. s. w. coordinirt ist. — Solches vorangeschickt, wollen wir nun die Integrale (30.) der Reihe nach in Betracht ziehen.

Erstens: das Integral J_s. — Die Entwicklung (29.) wird offenbar für dieses Integral, d. i. für $\nu_0 = s$, lauten:

$$(35.)\quad J_s = P_s + \frac{b_0}{a_2} P_{s-2} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} P_{s-4} + \cdots\cdots,$$

*) Man vergl. (27.b).

durch geschweifte Klammern ausgezeichnet. Und in ähnlicher Weise mag bei allen folgenden Formeln verfahren werden.

Ordnet man den geschlossenen Ausdruck (38.) nach Kugelfunctionen mit *steigendem* Index, so ergiebt sich:

$$(40.)\quad J_s = \frac{b_0 b_2 \cdots b_{2q-2}}{a_2 a_4 \cdots a_{2q}} \left[P_d + \frac{a_{2q}}{b_{2q-2}} P_{d+2} + \frac{a_{2q} a_{2q-2}}{b_{2q-2} b_{2q-4}} P_{d+4} + \cdots + \frac{a_{2q} a_{2q-2} \cdots a_2}{b_{2q-2} b_{2q-4} \cdots b_0} P_s \right].$$

Was die hier auftretenden Grössen a, b anbelangt, so findet man aus (36.):

$$(41.)\quad \begin{aligned} a_{2q} &= \frac{(2p+2)(-2q)(2d+1)(1)}{2d+1}, & b_{2q-2} &= \frac{(2p+3)(-2q+1)(2d+2)(2)}{2d+5}, \\ a_{2q-2} &= \frac{(2p+4)(-2q+2)(2d+3)(3)}{2d+5}, & b_{2q-4} &= \frac{(2p+5)(-2q+3)(2d+4)(4)}{2d+9}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe der a, b, so gewinnt die Formel (40.) schliesslich folgende Gestalt:

$$(42.)\quad \begin{aligned} J_s = \frac{1}{A} \Big[P_d &+ \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2p+2}{2p+3}\right) \left(\frac{2q}{2q-1}\right) \left(\frac{2d+1}{2d+2}\right) \left\{\frac{2d+5}{2d+1}\right\} P_{d+2} + \\ &+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) \left(\frac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right) \left(\frac{2q(2q-2)}{(2q-1)(2q-3)}\right) \left(\frac{(2d+1)(2d+3)}{(2d+2)(2d+4)}\right) \left\{\frac{2d+9}{2d+1}\right\} P_{d+4} + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{(2p+2)(2p+4)\cdots 2s}{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+1)}\right) \left(\frac{(2d+1)(2d+3)\cdots(2p-1)}{(2d+2)(2d+4)\cdots 2p}\right) \left\{\frac{2s+1}{2d+1}\right\} P_s \Big], \end{aligned}$$

wo die Constante A genau eben so gross ist, wie in der letzten Zeile der Coefficient von P_s. — Beiläufig sei bemerkt, dass die Coefficienten letzter Zeile in den Formeln (39.) und (42.) zu einander reciprok sein müssen; denn der in (39.) repräsentirt, wie aus (38.) ersichtlich, den Werth von $\frac{b_0 b_2 \cdots b_{2q-2}}{a_2 a_4 \cdots a_{2q}}$; und der in (42.), wie aus (40.) folgt, den Werth des Bruches $\frac{a_{2q} a_{2q-2} \cdots a_2}{b_{2q-2} b_{2q-4} \cdots b_0}$. Diese Reciprocität der beiden Coefficienten findet sich aber in der That bestätigt; was als Controle der Rechnung angesehen werden mag.

Zweitens: das Integral $J_{-(s+2)}$. — Bringt man auf dieses Integral, d. i. auf $\nu_0 = -(s+2)$, die Formel (29.) in Anwendung, so gelangt man zu einer nach den Functionen

$$P_{-(s+2)}, \qquad P_{-(s+4)}, \qquad P_{-(s+6)}, \cdots$$

fortschreitenden Entwicklung. Und man kommt daher, weil statt dieser Kugelfunctionen *erster* Art mit *negativen* Indices die mit *positiven* Indices versehenen Kugelfunctionen *zweiter* Art:

$$Q_{s+1}, \qquad Q_{s+3}, \qquad Q_{s+5}, \cdots$$

zu nehmen sind (vergl. Seite 67), zu folgendem Resultat:

$$(43.)\qquad J_{-(s+2)} = Q_{s+1} + \frac{b_0}{a_2} Q_{s+3} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} Q_{s+5} + \frac{b_0 b_2 b_4}{a_2 a_4 a_6} Q_{s+7} + \cdots$$

Gleichzeitig ergeben sich für die Constanten a, b aus (34.) die Werthe:

$$(44.)\qquad \begin{aligned} a_2 &= -\frac{2(2s+4)(2p+3)(2q+3)}{2s+7}, & b_0 &= -\frac{1(2s+3)(2p+2)(2q+2)}{2s+3}, \\ a_4 &= -\frac{4(2s+6)(2p+5)(2q+5)}{2s+11}, & b_2 &= -\frac{3(2s+5)(2p+4)(2q+4)}{2s+7}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in (43.), so gelangt man schliesslich zu folgender *ins Unendliche fortlaufenden* Reihe:

$$(45.)\qquad J_{-(s+2)} = Q_{s+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2s+3}{2s+4}\right)\left\{\frac{2s+7}{2s+3}\right\} Q_{s+3} +$$

$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right)\left(\frac{(2q+2)(2q+4)}{(2q+3)(2q+5)}\right)\left(\frac{(2s+3)(2s+5)}{(2s+4)(2s+6)}\right)\left\{\frac{2s+11}{2s+3}\right\} Q_{s+5} + \cdots \text{ in inf.}$$

Drittens: das Integral $J_{-(d+1)}$. — Für dieses Integral, d. i. für $\nu_0 = -(d+1)$, schreitet die Entwicklung (29.) fort nach den Functionen:

$$P_{-(d+1)},\qquad P_{-(d+3)},\qquad P_{-(d+5)},\ \cdots\cdots,$$

wofür (ähnlich wie im vorhergehenden Fall) die Kugelfunctionen zweiter Art:

$$Q_d,\qquad Q_{d+2},\qquad Q_{d+4},\ \cdots\cdot$$

zu setzen sind. Somit erhält man:

$$(46.)\qquad J_{-(d+1)} = Q_d + \frac{b_0}{a_2} Q_{d+2} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} Q_{d+4} + \cdots,$$

wo für die a, b aus (34.) die Werthe resultiren:

$$(47.)\qquad \begin{aligned} a_2 &= \frac{2(2q-1)(2p+3)(2d+2)}{2d+5}, & b_0 &= \frac{1(2q)(2p+2)(2d+1)}{2d+1}, \\ a_4 &= \frac{4(2q-3)(2p+5)(2d+4)}{2d+9}, & b_2 &= \frac{3(2q-2)(2p+4)(2d+3)}{2d+5}. \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, dass b_0, b_2, b_4, b_6, $\cdots$ respective mit den Factoren $2q$, $2q-2$, $2q-4$, $2q-6$, $\cdots$ behaftet sind, und dass also

$$b_{2q} = 0$$

ist. Der Ausdruck (46.) wird daher ein *geschlossener* sein, und folgende Gestalt besitzen:

$$(48.)\qquad J_{-(d+1)} = Q_d + \frac{b_0}{a_2} Q_{d+2} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} Q_{d+4} + \cdots\cdots + \frac{b_0 b_2 \cdots b_{2q-2}}{a_2 a_4 \cdots a_{2q}} Q_s.$$

Substituirt man endlich für die Grössen a, b ihre Werthe aus (47.), so gelangt man zu folgender Formel:

$$(49.)\qquad J_{-(d+1)} = Q_d + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2d+1}{2d+2}\right)\left\{\frac{2d+5}{2d+1}\right\} Q_{d+2} +$$
$$+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{2q(2q-2)}{(2q-1)(2q-3)}\right)\left(\frac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right)\left(\frac{(2d+1)(2d+3)}{(2d+2)(2d+4)}\right)\left\{\frac{2d+9}{2d+1}\right\} Q_{d+4} + \cdots$$
$$\cdots\cdots + \left(\frac{(2p+2)(2p+4)\cdots 2s}{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+1)}\right)\left(\frac{(2d+1)(2d+3)\cdots(2p-1)}{(2d+2)(2d+4)\cdots 2p}\right)\left\{\frac{2s+1}{2d+1}\right\} Q_s .$$

Vergleicht man diese Formel (49.) mit der früher für J_s erhaltenen Formel (42.), so zeigt sich eine überraschende Uebereinstimmung. Denn abgesehen vom Factor $\frac{1}{A}$ unterscheiden sich die Formeln nur dadurch, dass wo in der einen P steht, in der andern Q auftritt. — Jene frühere Formel für J_s (42.) kann aber durch eine andere Anordnung ihrer Glieder in die Gestalt (39.) versetzt werden; und man kann daher die analoge Umgestaltung der gegenwärtigen Formel (49.) sofort niederschreiben. Sie wird lauten:

$$(50.)\qquad J_{-(d+1)} = A\left[Q_s + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2s+1}{2s}\right)\left\{\frac{2s-3}{2s+1}\right\} Q_{s-2} +\right.$$
$$+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{2p(2p-2)}{(2p-1)(2p-3)}\right)\left(\frac{2q(2q-2)}{(2q-1)(2q-3)}\right)\left(\frac{(2s+1)(2s-1)}{2s(2s-2)}\right)\left\{\frac{2s-7}{2s+1}\right\} Q_{s-4} + \cdots$$
$$\left.\cdots\cdots + \left(\frac{2p(2p-2)\cdots(2d+2)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(2d+1)}\right)\left(\frac{(2s+1)(2s-1)\cdots(2p+3)}{2s(2s-2)\cdots(2p+2)}\right)\left\{\frac{2d+1}{2s+1}\right\} Q_d\right].$$

Hier hat A dieselbe Bedeutung wie früher in (42.); woraus ersichtlich, dass $\frac{1}{A}$ identisch ist mit dem in der vorstehenden Entwicklung (50.) in der letzten Zeile stehendem Coefficienten von Q_d.

Viertens: das Integral J_{d-1}. Die *überhaupt möglichen* Werthe von d sind offenbar:

$$d = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots;$$

denn es ist $d = p - q$, und nach unserer ein für allemal getroffenen Festsetzung: $p \geq q$, [vergl. (32.)]. Von diesen Fällen aber können wir den Fall $d = 0$ ausschliessen, weil für $d = 0$ das zu behandelnde Integral J_{d-1} mit dem schon absolvirten Integral $J_{-(d+1)}$ identisch wird*). Mit andern

*) Für den Specialfall: $d = 0$ reduciren sich die *vier* Wurzeln v_0 (28.) und die denselben entsprechenden *vier* particularen Integrale der gegebenen Differentialgleichung *vierter* Ordnung auf *drei* Wurzeln resp. auf *drei* Integrale; was in Einklang ist mit der früher (Seite 96) constatirten Thatsache, dass jene Differentialgleichung für den Specialfall $d = 0$, d. i. für $p = q$, in eine Differentialgleichung *dritter* Ordnung übergeht.

Worten: *Wir können uns bei der näheren Untersuchung des hier vorgelegten Integrals J_{d-1} auf die Fälle*

(51.) $$d = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

beschränken. Hat aber d einen dieser Werthe (51.), so wird die dem vorgelegten Integral entsprechende Wurzel ν_0 oder $d - 1$ der Formel entsprechen:

(52.) $$\nu_0 = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

Solches vorangeschickt bringen wir nun die allgemeine Entwicklung (29.) in Anwendung. Da bei unserm Integral $\nu_0 = d - 1$ ist, so ergiebt sich:

(53.) $$J_{d-1} = P_{d-1} + \frac{b_0}{a_2} P_{d-3} + \frac{b_0 b_2}{a_2 a_4} P_{d-5} + \cdots,$$

wo die a, b nach (34.) die Werthe haben:

(54.) $$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(2p-1)(-2q-3)(2d-2)(-2)}{2d-5}, & b_0 &= \frac{(2p)(-2q-2)(2d-1)(-1)}{2d-1}, \\ a_4 &= \frac{(2p-3)(-2q-5)(2d-4)(-4)}{2d-9}, & b_2 &= \frac{(2p-2)(-2q-4)(2d-3)(-3)}{2d-5}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder (allgemeiner ausgedrückt) die Werthe:

(55.) $$a_j = \frac{(2p-j+1)(-2q-j-1)(2d-j)(-j)}{2d-2j-1}, \qquad b_{j-2} = \frac{(2p-j+2)(-2q-j)(2d-j+1)(-j+1)}{2d-2j+3}.$$

Hieraus erkennt man, dass die Grössen b_0, b_2, b_4, $\cdots$ resp. mit den Factoren $2p$, $2p-2$, $2p-4$, $\cdots$ behaftet sind, dass mithin

$$b_{2p} = 0$$

ist, und dass also der Ausdruck (53.) ein *geschlossener* sein wird, dessen letztes Glied lautet:

$$\frac{b_0 b_2 \cdots b_{2p-2}}{a_2 a_4 \cdots a_{2p}} P_{-(s+1)}.$$

Nun entspricht aber das hier betrachtete particulare Integral einer Wurzel ν_0, welche [nach (51.), (52.)] einen der Werthe 0, 1, 2, 3, 4, $\cdots$ besitzt. Und hieraus folgt *nach einem später zu beweisenden Satze**), dass die Entwicklung (53.) dieses Integrals nicht mit $P_{-(s+1)}$, sondern *schon früher abbricht, der Art, dass ihr letztes Glied mit P_0 resp. P_1 behaftet ist.* Somit ergiebt sich aus (53.) durch Substitution der Werthe (54.) folgende Formel:

*) Satz (σ.) auf Seite 114.

[vorausgesetzt: $d > 0$.] *)

$$J_{d-1} = P_{d-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2d-1}{2d-2}\right)\left\{\frac{2d-5}{2d-1}\right\} P_{d-3} + \tag{56.}$$

$$+ \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{2p(2p-2)}{(2p-1)(2p-3)}\right)\left(\frac{(2q+2)(2q+4)}{(2q+3)(2q+5)}\right)\left(\frac{(2d-1)(2d-3)}{(2d-2)(2d-4)}\right)\left\{\frac{2d-9}{2d-1}\right\} P_{d-5} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{\begin{matrix} \left(\frac{1\cdot 3\cdots(d-2)}{2\cdot 4\cdots(d-1)}\right)\left(\frac{2p(2p-2)\cdots(s+3)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(s+2)}\right)\left(\frac{(2q+2)(2q+4)\cdots(s-1)}{(2q+3)(2q+5)\cdots s}\right)\left(\frac{(2d-1)(2d-3)\cdots(d+2)}{(2d-2)(2d-4)\cdots(d+1)}\right)\left\{\frac{1}{2d-1}\right\} P_0 \\ \left(\frac{1\cdot 3\cdots(d-3)}{2\cdot 4\cdots(d-2)}\right)\left(\frac{2p(2p-2)\cdots(s+4)}{(2p-1)(2p-3)\cdots(s+3)}\right)\left(\frac{(2q+2)(2q+4)\cdots(s-2)}{(2q+3)(2q+5)\cdots(s-1)}\right)\left(\frac{(2d-1)(2d-3)\cdots(d+3)}{(2d-2)(2d-4)\cdots(d+2)}\right)\left\{\frac{3}{2d-1}\right\} P_1 \end{matrix}\right\},$$

wo die zweifache Form des letzten Gliedes mittelst einer *geschweiften* Klammer angedeutet ist. Die *eine* Form (in der oberen Zeile) gilt für ein ungerades, die andere (in der unteren Zeile) für ein gerades d.

Will man diesen Ausdruck ordnen nach den *steigenden* Indices der P, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Die Zahl $d-1$ ist *gerade*. Alsdann folgt aus (53.) folgende Formel:

$$J_{d-1} = \frac{b_0 b_2 \cdots b_{d-3}}{a_2 a_4 \cdots a_{d-1}}\left[P_0 + \frac{a_{d-1}}{b_{d-3}} P_2 + \frac{a_{d-1} a_{d-3}}{b_{d-3} b_{d-5}} P_4 \cdots + \frac{a_{d-1} \cdots a_2}{b_{d-3} \cdots b_0} P_{d-1}\right], \tag{57.}$$

oder, falls man für die a, b ihre Werthe (55.) substituirt:

[vorausgesetzt, dass $d > 0$ und ungerade ist.]

$$J_{d-1} = \frac{1}{B}\Big[P_0 + \left\{\frac{5}{1}\right\}\left(\frac{d-1}{d-2}\right)\left(\frac{d+1}{d+2}\right)\left(\frac{s}{s-1}\right)\left(\frac{s+2}{s+3}\right) P_2 + \tag{58.}$$

$$+ \left\{\frac{9}{1}\right\}\left(\frac{(d-1)(d-3)}{(d-2)(d-4)}\right)\left(\frac{(d+1)(d+3)}{(d+2)(d+4)}\right)\left(\frac{s(s-2)}{(s-1)(s-3)}\right)\left(\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)(s+5)}\right) P_4 + \cdots B P_{d-1}\Big],$$

wo die Zahl B (welche *doppelt* auftritt, im vorgesetzten Factor und auch als Coefficient von P_{d-1}) den Werth hat:

$$B = \left\{\frac{2d-1}{1}\right\}\left(\frac{(d-1)(d-3)\cdots 2}{(d-2)(d-4)\cdots 1}\right)\left(\frac{(d+1)(d+3)\cdots(2d-2)}{(d+2)(d+4)\cdots(2d-1)}\right)\left(\frac{s(s-2)\cdots(2q+3)}{(s-1)(s-3)\cdots(2q+2)}\right)\left(\frac{(s+2)(s+4)\cdots(2p-1)}{(s+3)(s+5)\cdots 2p}\right),$$

und etwas kürzer auch so darstellbar ist**):

$$B = \frac{s+1}{2(2q+1)f(q)}\left(\frac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{(d+1)(d+2)\cdots p}\right).$$

Zweiter Fall. Die Zahl $d-1$ ist *ungerade*. Alsdann erhält man aus (53.) die Formel:

---

*) In der That ist diese Formel (56.), ebenso wie die weiter folgenden Formeln (58.), (59.), für den Fall $d = 0$ *nicht mehr richtig*, oder wenigstens *nicht mehr zuverlässig*, weil wir bei Ableitung der Formel den Fall $d = 0$ ausdrücklich bei Seite gelassen haben [vergl. (51.)]. Will man übrigens den Werth des particularen Integrals J_{d-1} für $d = 0$, also den Werth des Integrals J_{-1} haben, so hat man sich an die *frühere* Formel (49.) zu wenden, und in *dieser* $d = 0$ zu setzen.

**) Hier bezeichnet f die auf Seite 85 eingeführte Function.

$$(59.)\qquad J_{d-1} = \frac{b_0 b_2 \cdots b_{d-4}}{a_2 a_4 \cdots a_{d-2}} \left[P_1 + \frac{a_{d-2}}{b_{d-4}} P_3 + \frac{a_{d-2} a_{d-4}}{b_{d-4} b_{d-6}} P_5 \cdots + \frac{a_{d-2} \cdots a_2}{b_{d-4} \cdots b_0} P_{d-1} \right],$$

oder, falls man die Werthe der a, b (55.) substituirt:

[vorausgesetzt, dass $d > 0$ und gerade ist.]

$$(60.)\qquad J_{d-1} = \frac{1}{C} \Big[P_1 + \left\{ \frac{7}{3} \right\} \left(\frac{d-2}{d-3} \right) \left(\frac{d+2}{d+3} \right) \left(\frac{s-1}{s-2} \right) \left(\frac{s+3}{s+4} \right) P_3 +$$

$$+ \left\{ \frac{11}{3} \right\} \left(\frac{(d-2)(d-4)}{(d-3)(d-5)} \right) \left(\frac{(d+2)(d+4)}{(d+3)(d+5)} \right) \left(\frac{(s-1)(s-3)}{(s-2)(s-4)} \right) \left(\frac{(s+3)(s+5)}{(s+4)(s+6)} \right) P_5 + \cdots + C P_{d-1} \Big],$$

wo die doppelt auftretende Zahl C den Werth hat:

$$C = \left\{ \frac{2d-1}{3} \right\} \left(\frac{(d-2)(d-4)\cdots 2}{(d-3)(d-5)\cdots 1} \right) \left(\frac{(d+2)(d+4)\cdots(2d-2)}{(d+3)(d+5)\cdots(2d-1)} \right) \left(\frac{(s-1)(s-3)\cdots(2q+3)}{(s-2)(s-4)\cdots(2q+2)} \right) \left(\frac{(s+3)(s+5)\cdots(2p-1)}{(s+4)(s+6)\cdots 2p} \right),$$

sich übrigens kürzer auch so darstellen lässt*):

$$C = \frac{1}{2(2q+1) f(q)} \left(\frac{s(s+2)}{3(s+1)} \right) \left(\frac{(d-1)(d+1)}{d} \right) \left(\frac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{d(d+1)\cdots p} \right).$$

§ 3.ª

Ableitung eines im Vorhergehenden (Seite 109) benutzten Satzes.

Der Ausdruck

$$(\alpha.)\qquad Y = A_0 P_{\nu_0} + A_2 P_{\nu_2} + \cdots$$

wird, wie wir gefunden haben [vergl. namentlich Seite 100—103] ein particulares Integral der vorgelegten Differentialgleichung vierter Ordnung sein, falls ν_2, ν_4, $\cdots$ die Werthe haben:

$$(\beta.)\qquad \nu_2 = \nu_0 - 2, \qquad \nu_4 = \nu_0 - 4, \cdots,$$

falls ferner ν_0 irgend eine Wurzel der biquadratischen Gleichung

$$(\gamma.)\qquad N_0 + 2\nu_0 L_0 = 0$$

vorstellt, und falls endlich die Coefficienten A_0, A_2, $\cdots$ der Bedingung entsprechen:

$$(\delta.)\qquad 0 = [N_0 A_0 P_{\nu_0} + N_2 A_2 P_{\nu_2} + \cdots] + 2\,[L_0 A_0 \sigma P'_{\nu_0} + L_2 A_2 \sigma P'_{\nu_2} + \cdots].$$

Es soll gegenwärtig untersucht werden, wie der Ausdruck (α.) für den *speciellen Fall* sich gestaltet, dass die Wurzel ν_0 durch eine der Zahlen

$$(\varepsilon.)\qquad 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

dargestellt ist.

---

*) Vergl. die vorhergehende Note.

Bei dieser Untersuchung ist in Betreff der früher [Seite 101] angewandten Gleichungen

$$(\zeta.)\qquad \sigma P'_\nu = \nu P_\nu + P'_{\nu-1},$$

$$(\eta.)\qquad P'_\nu = (2\nu - 1) P_{\nu-1} + (2\nu - 5) P_{\nu-3} + \cdots$$

zu beachten, dass die Gleichung (ζ.) nicht mehr gültig ist für $\nu = 0$, und dass andererseits die Entwicklung (η.) mit P_1 resp. P_0 *abbricht*. Substituirt man in (ζ.) den für $P'_{\nu-1}$ aus (η.) sich ergebenden Werth, so erhält man:

$$(\vartheta.)\qquad \sigma P'_\nu = \nu P_\nu + (2\nu - 3) P_{\nu-2} + (2\nu - 7) P_{\nu-4} + \cdots;$$

so dass man (mit Rücksicht auf das eben erwähnte Abbrechen) zu den Formeln gelangt:

$$(\iota.)\qquad \begin{array}{ll} P'_0 = 0, & \\ \sigma P'_2 = 2 P_2 + P_0, & \sigma P'_1 = P_1, \\ \sigma P'_4 = 4 P_4 + 5 P_2 + P_0, & \sigma P'_3 = 3 P_3 + 3 P_1, \\ \sigma P'_6 = 6 P_6 + 9 P_4 + 5 P_2 + P_0, & \sigma P'_5 = 5 P_5 + 7 P_3 + 3 P_1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Solches vorangeschickt, beginnen wir mit der Betrachtung *des* Falles, dass eine Wurzel ν_0 der biquadratischen Gleichung (γ.) den Werth besitze

$$(\varkappa.)\qquad \nu = 0, \quad \text{woraus folgt:} \quad N_0 = 0, \text{*)}.$$

Das dieser Wurzel entsprechende Integral Y (α.) lautet alsdann:

$$Y = A_0 P_0 + A_2 P_{-2} + A_4 P_{-4} + \cdots,$$

wo die A aus der Bedingung (δ.):

$$0 = [N_0 A_0 P_0 + N_2 A_2 P_{-2} + \cdots] + 2\,[0 + L_2 A_2 \sigma P'_{-2} + \cdots] \text{ **)}$$

zu bestimmen sind. Dieser Bedingung aber wird, weil N_0 [nach ($\varkappa$.)] verschwindet, genügt werden, sobald man

$$(\varkappa'.)\qquad A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0$$

setzt, hingegen A_0 willkürlich lässt. Demgemäss wird das der betrachteten Wurzel $\nu_0 = 0$ entsprechende particulare Integral lauten:

$$(\varkappa''.)\qquad Y = A_0 P_0.$$

*) Da $\nu_0 = 0$ eine Wurzel der Gleichung (γ.) sein soll, so muss die linke Seite der Gleichung bei Substitution dieser Wurzel $\nu_0 = 0$ verschwinden, d. h. $N_0 = 0$ sein.

**) Das erste Glied dieser Zeile ist 0, weil $P_0 = 1$, mithin $P'_0 = 0$ ist.

Wir betrachten zweitens den Fall, dass eine Wurzel ν_0 der biquadratischen Gleichung (γ.) den Werth habe:

$$(\lambda.)\qquad \nu_0 = 1\,,\qquad \text{woraus folgt:}\qquad N_0 + 2\,L_0 = 0\,.$$

Das dieser Wurzel entsprechende Integral (α.) lautet alsdann:

$$Y = A_0\,P_1 + A_2\,P_{-1} + A_4\,P_{-3} + \cdots,$$

wo die A der Bedingung (δ.):

$$0 = N_0\,A_0\,P_1 + N_2\,A_2\,P_{-1} + \cdots$$
$$+ 2\,[L_0\,A_0\,\sigma\,P_1' + L_2\,A_2\,\sigma\,P_{-1}' + \cdots]$$

zu entsprechen haben. Diese Bedingung aber nimmt, wenn man für $\sigma\,P_1'$ seinen Werth (ι.) substituirt, die Gestalt an:

$$0 = (N_0 + 2\,L_0)\,A_0\,P_1 + N_2\,A_2\,P_{-1} + \cdots$$
$$+ 2\,[L_2\,A_2\,\sigma\,P_{-1}' + \cdots],$$

und wird daher, weil $N_0 + 2\,L_0$ [nach (λ.)] verschwindet, erfüllt sein, sobald man

$$(\lambda'.)\qquad A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0$$

setzt, und A_0 willkürlich lässt. Folglich wird das der betrachteten Wurzel $\nu_0 = 1$ entsprechende particulare Integral den Werth haben:

$$(\lambda''.)\qquad Y = A_0\,P_1\,.$$

Wir betrachten ferner den Fall, dass eine Wurzel ν_0 der biquadratischen Gleichung (γ.) den Werth habe:

$$(\varrho.)\qquad \nu_0 = 2\,,\qquad \text{woraus folgt:}\qquad N_0 + 4\,L_0 = 0\,.$$

Das dieser Wurzel entsprechende Integral Y (α.) lautet:

$$Y = A_0\,P_2 + A_2\,P_0 + A_4\,P_{-2} + \cdots,$$

wo die A der Bedingung (δ.)

$$0 = N_0\,A_0\,P_2 + N_2\,A_2\,P_0 + N_4\,A_4\,P_{-2} + \cdots$$
$$+ 2\,[L_0\,A_0\,\sigma\,P_2' + \quad 0 \quad + L_4\,A_4\,\sigma\,P_{-2}' + \cdots]$$

genügen müssen. Diese Bedingung aber gewinnt, falls man für $\sigma\,P_2'$ den Werth (ι.) substituirt, die Gestalt:

$$0 = (N_0 + 4\,L_0)\,A_0\,P_2 + (2\,L_0\,A_0 + N_2\,A_2)\,P_0 + N_4\,A_4\,P_{-2} + \cdots$$
$$+ 2\,[L_4\,A_4\,\sigma\,P_{-2}' + \cdots],$$

und wird also, weil $N_0 + 4\,L_0$ [nach (ϱ)] verschwindet, erfüllt sein, falls man die A den Relationen unterwirft:

$$(\varrho'.)\qquad 2\,L_0\,A_0 + N_2\,A_2 = 0\,,\qquad A_4 = A_6 = \cdots = 0\,.$$

Folglich wird das der betrachteten Wurzel $\nu_0 = 2$ entsprechende particulare Integral lauten:

$$(\varrho''.) \qquad Y = A_0 P_2 + A_2 P_0 ,$$

wo A_0 willkürlich, und A_2 mit A_0 durch die ersten der Gleichungen (ϱ'.) verbunden ist.

In ähnlicher Weise könnte man die weiteren Fälle $\nu_0 = 3, 4, 5, \cdots$ behandeln. Man übersieht aber bereits aus den erhaltenen Resultaten ($\varkappa''$.), (λ''.), (ϱ''.), dass das jedesmal sich ergebende Integral von *geschlossener* Gestalt sein, und zum letzten Gliede P_0 resp. P_1 haben wird. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Besitzt die für ν_0 aufgestellte biquadratische Gleichung eine Wurzel, deren Werth durch eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ····· dargestellt ist, so wird das dieser Wurzel entsprechende particulare Integral:

$$(\sigma.) \qquad Y = A_0 P_{\nu_0} + A_2 P_{\nu_2} + \cdots\cdots$$

ein geschlossener Ausdruck sein, dessen letztes Glied mit P_0 resp. mit P_1 behaftet ist). Jene vier Wurzeln sind aber:*

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & \nu_0 = p + q & = s, \\ \text{II.} & \nu_0 = -(p+q+2) & = -(s+2), \\ \text{III.} & \nu_0 = q - p - 1 & = -(d+1), \\ \text{IV.} & \nu_0 = p - q - 1 & = d - 1; \end{array}$$

und der Satz wird also Anwendung finden auf die erste und letzte Wurzel, d. i. auf die Integrale J_s und J_{d-1}. [Vergl. die Entwicklungen dieser beiden Integrale, Seite 105 und 110.]

§ 3.[b]

Eine etwas andere Methode zur Integration der aufgestellten Differentialgleichung vierter Ordnung.

Wir haben im Vorhergehenden das Integral Y dieser Differentialgleichung (Seite 100) nach den P entwickelt. Wir wollen gegenwärtig dasselbe nach den Q zu entwickeln suchen, also statt des Ansatzes (14.) folgenden Ansatz machen:

---

*) Womit natürlich *nicht* gesagt, dass der Ausdruck nicht unter Umständen auch schon *früher* abbrechen könne. Ist z. B. $\nu_0 = 6$, so wird man zufolge des Satzes erhalten:

$$Y = A_0 P_6 + A_2 P_4 + A_4 P_2 + A_6 P_0 .$$

Möglicherweise aber können einige der A *Null* sein, z. B. A_4 und A_6; und alsdann wird der Ausdruck also nicht mit P_0, sondern schon *früher* mit P_4 abbrechen.

(a.) $$Y = A_0 Q_{\nu_0} + A_2 Q_{\nu_2} + A_4 Q_{\nu_4} + \cdots$$

Alsdann ergibt sich zur Bestimmung der A, ν [an Stelle von (17.)] die Formel:

(b.) $$\begin{aligned} 0 = & [N_0 A_0 Q_{\nu_0} + N_2 A_2 Q_{\nu_2} + \cdots] \\ & + 2\sigma [L_0 A_0 Q'_{\nu_0} + L_2 A_2 Q'_{\nu_2} + \cdots], \end{aligned}$$

wo die N, L ihre früheren Bedeutungen (16.[a, b, ..]) haben sollen. Werden hierin die $\sigma Q'_\nu$ eliminirt mittelst der Relation:

(c.) $$\sigma Q'_\nu = \nu Q_\nu + Q'_{\nu-1}, \qquad \text{[vergl. (C}^{\text{b}}\text{.), Seite 65]}$$

welche, mit Ausnahme des Falles $\nu = 0$, für alle positiven und negativen Werthe von ν gilt, so erhält man:

(d.) $$\begin{aligned} 0 = & [(N_0 + 2\nu_0 L_0) A_0 Q_{\nu_0} + (N_2 + 2\nu_2 L_2) A_2 Q_{\nu_2} + \cdots] \\ & + 2 [L_0 A_0 Q'_{\nu_0 - 1} + L_2 A_2 Q'_{\nu_2 - 1} + \cdots]. \end{aligned}$$

Drückt man nun die Q' durch die Q selber aus mittelst der Relation:

(e.) $$Q'_{\nu-1} = -[(2\nu + 1) Q_\nu + (2\nu + 5) Q_{\nu+2} + (2\nu + 9) Q_{\nu+4} + \cdots], \qquad \text{[vergl. (15.), Seite 66]}$$

so ergiebt sich:

(f.) $$\begin{aligned} 0 = & [(N_0 + 2\nu_0 L_0) A_0 Q_{\nu_0} + (N_2 + 2\nu_2 L_2) A_2 Q_{\nu_2} + (N_4 + 2\nu_4 L_4) A_4 Q_{\nu_4} + \cdots] \\ & - 2 L_0 A_0 [(2\nu_0 + 1) Q_{\nu_0} + (2\nu_0 + 5) Q_{\nu_0 + 2} + (2\nu_0 + 9) Q_{\nu_0 + 4} + \cdots] \\ & \qquad - 2 L_2 A_2 [(2\nu_2 + 1) Q_{\nu_2} + (2\nu_2 + 5) Q_{\nu_2 + 2} + \cdots] \\ & \qquad\qquad - 2 L_4 A_4 [(2\nu_4 + 1) Q_{\nu_4} + \cdots] \\ & \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \end{aligned}$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn man setzt:

(g.) $$\begin{aligned} \nu_2 &= \nu_0 + 2, & b_0 &= 0, \\ \nu_4 &= \nu_0 + 4, & b_2 A_2 &= a_0 A_0, \\ \nu_6 &= \nu_0 + 6, & b_4 A_4 &= a_2 A_2, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{aligned}$$

wo a_λ, b_λ die in (25.) eingeführten Grössen vorstellen, so dass also z. B. b_0, zufolge (26.), den Werth hat:

(h.) $$b_0 = \frac{[\nu_0^2 - (p + q + 1)^2][\nu_0^2 + (p - q)^2]}{2\nu_0 + 1}.$$

Die in (g.) aufgeführte Gleichung $b_0 = 0$ liefert daher für ν_0 folgende vier Werthe:

(i.) $$\begin{aligned} \text{I.} \quad \nu_0 &= -p - q - 1 &&= -(s + 1), \\ \text{II.} \quad \nu_0 &= p + q + 1 &&= s + 1, \\ \text{III.} \quad \nu_0 &= p - q &&= d, \\ \text{IV.} \quad \nu_0 &= q - p &&= -d. \end{aligned}$$

Gleichzeitig ergiebt sich aus (33.) und mit Rücksicht auf die in (g.) erwähnten Relationen der ν:

$$(k.)\quad \begin{aligned} \frac{a_0}{b_2} &= \frac{(\nu_0 - d + 1)(\nu_0 + d + 1)(\nu_0 - s)(\nu_0 + s + 2)}{(\nu_0 - d + 2)(\nu_0 + d + 2)(\nu_0 - s + 1)(\nu_0 + s + 3)} \left\{\frac{2\nu_0 + 5}{2\nu_0 + 1}\right\}, \\ \frac{a_2}{b_4} &= \frac{(\nu_0 - d + 3)(\nu_0 + d + 3)(\nu_0 - s + 2)(\nu_0 + s + 4)}{(\nu_0 - d + 4)(\nu_0 + d + 4)(\nu_0 - s + 3)(\nu_0 + s + 5)} \left\{\frac{2\nu_0 + 9}{2\nu_0 + 5}\right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die vier durch (i.), (k.) bestimmten particularen Integrale sind nun, wenn man ihre constanten Factoren mit C_1, C_2, C_3, C_4 bezeichnet, folgende:

Erstes Integral. $[\nu_0 = -(s+1)]$.

$$(l.)\quad Y = C_1 \left[Q_{-s-1} + \frac{a_0}{b_2} Q_{-s+1} + \frac{a_0 a_2}{b_2 b_4} Q_{-s+3} + \cdots \right],$$

wo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{b_2} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2s+1}{2s}\right)\left\{\frac{2s-3}{2s+1}\right\}, \\ \frac{a_2}{b_4} &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-3}\right)\left(\frac{2q-2}{2q-3}\right)\left(\frac{2s-1}{2s-2}\right)\left\{\frac{2s-7}{2s-3}\right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Offenbar kann man übrigens in (l.) statt der aufeinanderfolgenden Q auch setzen: P_s, P_{s-2}, P_{s-4}, $\cdots$

Zweites Integral. $[\nu_0 = s+1]$.

$$(m.)\quad Y = C_2 \left[Q_{s+1} + \frac{a_0}{b_2} Q_{s+3} + \frac{a_0 a_2}{b_2 b_4} Q_{s+5} + \cdots \right],$$

wo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{b_2} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2s+3}{2s+4}\right)\left\{\frac{2s+7}{2s+3}\right\}, \\ \frac{a_2}{b_4} &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2p+4}{2p+5}\right)\left(\frac{2q+4}{2q+5}\right)\left(\frac{2s+5}{2s+6}\right)\left\{\frac{2s+11}{2s+7}\right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Drittes Integral. $[\nu_0 = d]$.

$$(n.)\quad Y = C_3 \left[Q_d + \frac{a_0}{b_2} Q_{d+2} + \frac{a_0 a_2}{b_2 b_4} Q_{d+4} + \cdots \right],$$

wo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{b_2} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2d+1}{2d+2}\right)\left\{\frac{2d+5}{2d+1}\right\}, \\ \frac{a_2}{b_4} &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2p+4}{2p+5}\right)\left(\frac{2q-2}{2q-3}\right)\left(\frac{2d+3}{2d+4}\right)\left\{\frac{2d+9}{2d+5}\right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Viertes Integral. $[\nu_0 = -d]$.

$$(o.)\quad Y = C_4 \left[Q_{-d} + \frac{a_0}{b_2} Q_{-d+2} + \frac{a_0 a_2}{b_2 b_4} Q_{-d+4} + \cdots \right],$$

wo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{b_2} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2d-1}{2d-2}\right)\left\{\frac{2d-5}{2d-1}\right\}, \\ \frac{a_2}{b_4} &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-3}\right)\left(\frac{2q+4}{2q+5}\right)\left(\frac{2d-3}{2d-4}\right)\left\{\frac{2d-9}{2d-5}\right\}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke (l.), (m.), (n.), (o.) sind aber, wie man leicht erkennt, der Reihe nach identisch mit den früheren Ausdrücken (39.), (45.), (49.), (56.), also, abgesehen von den constanten Factoren C_1, C_2, C_3, C_4, der Reihe nach identisch mit J_s, $J_{-(s+2)}$, $J_{-(d+1)}$, J_{d-1}.

§ 4.

Entwicklung des Productes zweier Kugelfunctionen in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.

Die betrachtete Differentialgleichung vierter Ordnung (Seite 95) besitzt einerseits, wie aus ihrer Entstehungsweise folgt, die particularen Integrale $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $Q_p P_q$, $P_p Q_q$, und besitzt andererseits, wie aus ihrer Integration hervorgeht, die particularen Integrale J_s, $J_{-(s+2)}$, $J_{-(d+1)}$, J_{d-1}. Folglich muss jedes der ersteren sich zusammensetzen lassen aus den vier letzteren. Zur vorläufigen Orientirung sei zunächst bemerkt, dass diese J nach (39.), (45.), (49.), (56.) Werthe haben von folgender Form:

$$\text{(61.)}\qquad \begin{aligned} J_s &= P_s + \alpha P_{s-2} + \beta P_{s-4} + \cdots\cdots \varkappa P_d, \\ J_{-(s+2)} &= Q_{s+1} + \alpha' Q_{s+3} + \beta' Q_{s+5} + \cdots\cdots \text{in inf.}, \\ J_{-(d+1)} &= Q_d + \alpha'' Q_{d+2} + \beta'' Q_{d+4} + \cdots\cdots + \varkappa'' Q_s, \\ J_{d-1} &= P_{d-1} + \alpha''' P_{d-3} + \beta''' P_{d-5} + \cdots\cdots + \varkappa''' (P_0 \text{ resp. } P_1); \end{aligned}$$

auch sei bemerkt, dass die *dritte* dieser Formeln nach (50.) in die Gestalt versetzt werden kann:

$$\text{(61.*)}\qquad J_{-(d+1)} = A\,[Q_s + \alpha^0 Q_{s-2} + \beta^0 Q_{s-4} + \cdots + \varkappa^0 Q_d],$$

wo die Grössen A, α^0, β^0, $\cdots \varkappa^0$, ebenso wie die α, β, $\cdots \varkappa$, die α', β', $\cdots$ u. s. w., gewisse von p und q abhängende Zahlen vorstellen. — An diese Formeln (61.) kann man folgende Bemerkungen knüpfen.

(α.) ····· *Die Integrale J_s und J_{d-1} werden unendlich gross, wenn ihr Argument $\sigma = \infty$ wird, und bleiben endlich für $\sigma = 1$.*

(β.) ····· *Die Integrale $J_{-(s+2)}$ und $J_{-(d+1)}$ verschwinden für $\sigma = \infty$, und werden unendlich gross für $\sigma = 1$.*

(γ.) ····· *Von den beiden Integralen J_s und J_{d-1} ist das eine eine gerade, das andere eine ungerade Function seines Argumentes.*

(δ.) ····· *Ebenso ist von den beiden Integralen $J_{-(s+2)}$ und $J_{-(d+1)}$ das eine eine gerade, das andere eine ungerade Function.*

Auf Grund dieser charakteristischen Eigenschaften ist es leicht, die Producte $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $\cdots$ durch die J auszudrücken.

Erstens. Das Product $P_p P_q$ besitzt für $\sigma = 1$ einen *endlichen* Werth (nämlich den Werth 1), muss also nach (β.) *un*abhängig sein von $J_{-(s+2)}$ und $J_{-(d+1)}$, und folglich von der Form sein:

$$P_p(\sigma) P_q(\sigma) = \mathsf{A}\, J_s(\sigma) + \mathsf{A}'\, J_{d-1}(\sigma), \tag{62.}$$

wo A, A' Constante sind. Hieraus aber ergiebt sich, durch Vertauschung von σ mit $-\sigma$, und mit Rücksicht auf (γ.):

$$(-1)^{p+q} P_p(\sigma) P_q(\sigma) = (-1)^s \left[\mathsf{A}\, J_s(\sigma) - \mathsf{A}'\, J_{d-1}(\sigma)\right],$$

oder einfacher geschrieben:

$$P_p(\sigma) P_q(\sigma) = \mathsf{A}\, J_s(\sigma) - \mathsf{A}'\, J_{d-1}(\sigma). \tag{63.}$$

Aus (62.), (63.) folgt sofort, dass $\mathsf{A}' = 0$ ist; so dass man erhält:

$$P_p P_q = \mathsf{A}\, J_s. \tag{64.}$$

Die Constante A soll am Schluss des § bestimmt werden.

Zweitens. Das Product $Q_p Q_q$ verschwindet für $\sigma = \infty$, muss also nach (α.) *un*abhängig sein von J_s und J_{d-1}, und folglich den Werth haben:

$$Q_p(\sigma) Q_q(\sigma) = \mathsf{B}\, J_{-(s+2)}(\sigma) + \mathsf{B}'\, J_{-(d+1)}(\sigma);$$

woraus durch Vertauschung von σ mit $-\sigma$ sich ergiebt:

$$(-1)^{p+q+2} Q_p(\sigma) Q_q(\sigma) = (-1)^{s+2} \left[\mathsf{B}\, J_{-(s+2)}(\sigma) - \mathsf{B}'\, J_{-(d+1)}(\sigma)\right].$$

Somit ist $\mathsf{B}' = 0$, und also:

$$Q_p Q_q = \mathsf{B}\, J_{-(s+2)}. \tag{65.}$$

Drittens. Das Product $Q_p P_q$ wird, weil $p \geq q$ vorausgesetzt ist [Seite 104], verschwinden für $\sigma = \infty$, und muss daher nach (α.) unabhängig sein von J_s und J_{d-1}, also den Werth haben:

$$Q_p(\sigma) P_q(\sigma) = \Gamma\, J_{-(d+1)}(\sigma) + \Gamma'\, J_{-(s+2)}(\sigma),$$

woraus durch Vertauschung von σ mit $-\sigma$ folgt:

$$(-1)^{p+q+1} Q_p(\sigma) P_q(\sigma) = (-1)^{d+1} \left[\Gamma\, J_{-(d+1)}(\sigma) - \Gamma'\, J_{-(s+2)}(\sigma)\right].$$

Demgemäss ist $\Gamma' = 0$, mithin:

$$Q_p P_q = \Gamma\, J_{-(d+1)}. \tag{66.}$$

Viertens. Das Product $P_p Q_q$ ist eine ungerade Function von σ, falls $p+q$ gerade, hingegen eine gerade Function, wenn $p+q$ ungerade ist. Hieraus folgt, dass dieses Product unabhängig ist von J_s und $J_{-(s+2)}$, also den Werth hat:

$$P_p Q_q = \Delta J_{-(d+1)} + \mathsf{E} J_{d-1}, \tag{67.}$$

wo Δ und E noch unbekannte Constanten sind. In dieser Gleichung wird für $\sigma = 1$ die linke Seite unendlich gross, und ebenso auch das *erste* Glied der rechten Seite.

Bemerkung. — Nach unserer ein für alle Mal gemachten Voraussetzung [vergl. (32.), Seite 104] ist $p \geq q$. Die Formel (66.) involvirt daher alle Producte PQ, in denen der Index von Q *grösser* als der von P ist, und die Formel (67.) all' diejenigen, in denen der Index von Q *kleiner* als der von P ist; während endlich diejenigen Producte PQ, in denen die beiden Indices einander *gleich* sind, nach Belieben sowohl der einen als der andern Formel subsumirt werden können.

In letzterer Beziehung wollen wir fortan, zur Vereinfachung unserer weiteren Untersuchungen, eine bestimmte Entscheidung treffen, indem wir festsetzen, dass die Producte PQ mit *gleichen* Indices *nur* der Formel (66.) subsumirt werden sollen, also (mit andern Worten) festsetzen,

(67.a) dass in (66.) die Differenz $p - q \geq 0$, dass hingegen in (67.) die Differenz $p - q$ stets > 0 (niemals $= 0$) gedacht werden solle.

Numerische Bestimmung von A, B, Γ. Die Formeln für $P_n(\sigma)$ und $Q_n(\sigma)$ lauten [vergl. Seite 1 und 13]:

$$\begin{aligned} P_n(\sigma) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,\sigma^n\,[1 + \mathfrak{g}\sigma^{-2} + \mathfrak{h}\sigma^{-4} + \cdots\cdot], \\ Q_n(\sigma) &= \frac{2\,(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\,\sigma^{-(n+1)}\,[1 + \mathfrak{g}'\sigma^{-2} + \mathfrak{h}'\sigma^{-4} + \cdots\cdot], \end{aligned} \tag{68.}$$

wo $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\cdots$ und $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'$, $\cdots$ Zahlen sind, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Zur Abkürzung mögen diese Formeln folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} P_n(\sigma) &= f(n)\cdot\sigma^n\,[1 + \mathfrak{g}\sigma^{-2} + \mathfrak{h}\sigma^{-4} + \cdots\cdot], \\ Q_n(\sigma) &= \frac{2}{(2n+1)f(n)}\,\sigma^{-(n+1)}\,[1 + \mathfrak{g}'\sigma^{-2} + \mathfrak{h}'\sigma^{-4} + \cdots\cdot]. \end{aligned} \tag{69.}$$

Alsdann repräsentirt

$$f(n) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \tag{70.a}$$

eine Function von n, welche für $n = 0, 1, 2$, etc. die Werthe besitzt:

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}, \qquad f(3) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}. \tag{70.b}$$

Auch ergeben sich alsdann aus (69.) die Formeln:

$$\left(\sigma^{-n} P_n(\sigma)\right)_{\sigma=\infty} = f(n),$$
(71.)
$$\left(\sigma^{n+1} Q_n(\sigma)\right)_{\sigma=\infty} = \frac{2}{(2n+1)f(n)}.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (64.) mit $\sigma^{-(p+q)}$, und setzt sodann $\sigma=\infty$, so folgt mit Rücksicht auf (61.):

$$\left(\sigma^{-p} P_p \cdot \sigma^{-q} P_q\right)_{\sigma=\infty} = \mathsf{A}\left(\sigma^{-s} P_s\right)_{\sigma=\infty},$$

d. i. nach (71.):

$$f(p)f(q) = \mathsf{A} f(s).$$

Man findet also:

$$\mathsf{A} = \frac{f(p)f(q)}{f(s)} = f(q)\frac{(p+1)(p+2)\cdots s}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2s-1)}; \tag{72.}$$

woraus z. B. mit Rücksicht auf (70.ᵇ) sofort folgt, dass $\mathsf{A}=1$ wird für $p=0$, ebenso für $q=0$, und ebenso auch für $p=q=0$.

Multiplicirt man ferner die Gleichung (65.) mit σ^{p+q+2}, und setzt sodann $\sigma=\infty$, so erhält man mit Rücksicht auf (61.):

$$\left(\sigma^{p+1} Q_p \cdot \sigma^{q+1} Q_q\right)_{\sigma=\infty} = \mathsf{B}\left(\sigma^{s+2} Q_{s+1}\right)_{\sigma=\infty},$$

d. i. nach (71.):

$$\frac{2}{(2p+1)f(p)}\,\frac{2}{(2q+1)f(q)} = \mathsf{B}\,\frac{2}{(2s+3)f(s+1)}.$$

Demnach wird:

$$\mathsf{B} = 2\,\frac{(2s+3)f(s+1)}{(2p+1)f(p)\cdot(2q+1)f(q)} = \frac{2}{(2q+1)f(q)}\,\frac{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+3)}{(p+1)(p+2)\cdots(s+1)}; \tag{73.}$$

woraus z. B. folgt, dass B für $p=0$ den Werth $\frac{2(2q+3)}{q+1}$, ferner für $q=0$ den Werth $\frac{2(2p+3)}{p+1}$, endlich für $p=q=0$ den Werth 6 annimmt.

Multiplicirt man ferner die Formel (66.) mit σ^{p-q+1}, und setzt wiederum $\sigma=\infty$, so folgt mit Rücksicht auf (61):

$$\left(\sigma^{p+1} Q_p \cdot \sigma^{-q} P_q\right)_{\sigma=\infty} = \Gamma\left(\sigma^{d+1} Q_d\right)_{\sigma=\infty},$$

d. i. nach (71.):

$$f(q)\,\frac{2}{(2p+1)f(p)} = \Gamma\,\frac{2}{(2d+1)f(d)}.$$

Somit wird:

$$(74.)\qquad \Gamma = f(q)\,\frac{(2d+1)f(d)}{(2p+1)f(p)} = f(q)\,\frac{(d+1)(d+2)\cdots p}{(2d+3)(2d+5)\cdots(2p+1)};\ ^{*})$$

woraus z. B. folgt, dass Γ für $q=0$, und ebenso für $p=q=0$ den Werth 1 annimmt. Den Werth von Γ für *den* Fall bestimmen zu wollen, dass $p=0$, hingegen q von 0 verschieden ist, würde keinen Sinn haben. Denn dieser Fall kann nicht eintreten, weil nach unserer beständigen Voraussetzung $p \geqq q$ ist.

Numerische Bestimmung von Δ, E. Diese Constanten Δ, E betreffen die Formel (67.), bei deren Behandlung wir uns nach (67.[a]) auf den Fall $p-q>0$ zu beschränken haben. Wir können diese Relation $p-q>0$ auch schreiben: $d>0$. Andererseits können wir die in Rede stehende Relation $p>q$ combiniren mit der Relation **): $q \geqq 0$, und erhalten in solcher Weise die Formeln:

$$(75.)\qquad d>0,\qquad p>q\geqq 0,\qquad \text{mithin auch: } p>0.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (67.) mit σ^{-p+q+1}, und setzt sodann $\sigma=\infty$, so erhält man mit Rücksicht auf (61.):

$$(76.)\qquad \left(\sigma^{-p}P_p\cdot\sigma^{q+1}Q_q\right)_{\sigma=\infty} = \Delta\left(\sigma^{-2d}\sigma^{d+1}Q_d\right)_{\sigma=\infty} + \mathrm{E}\left(\sigma^{-(d-1)}P_{d-1}\right)_{\sigma=\infty};$$

hieraus aber folgt nach (71.) und namentlich ***) auch mit Rücksicht auf die Relation $d>0$ (75.):

$$f(p)\,\frac{2}{(2q+1)f(q)} = 0 + \mathrm{E}f(d-1).$$

Demnach erhält man:

$$(77.)\qquad \mathrm{E} = \frac{2f(p)}{(2q+1)f(q)f(d-1)} = \frac{2}{(2q+1)f(q)}\,\frac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{d(d+1)(d+2)\cdots p};$$

---

*) Die Function $f(n)$ hat, wie man sofort erkennt, die Eigenschaft, dass für jedes beliebige n die Gleichung stattfindet:

$$(2n+1)f(n) = (n+1)f(n+1).$$

Demgemäss können die Formeln für B und Γ, (73.) und (74.), auch so geschrieben werden:

$$\mathrm{B} = 2\,\frac{(s+2)f(s+2)}{(p+1)f(p+1)\cdot(q+1)f(q+1)},$$

$$\Gamma = f(q)\,\frac{(d+1)f(d+1)}{(p+1)f(p+1)}.$$

**) Nach unserer gleich zu Anfang (Seite 94) gemachten Annahme, sollen p und q *positive ganze* Zahlen, resp. Null sein; woraus in der That folgt $q \geqq 0$.

***) Wollte man die Voraussetzung $d>0$ *fallen* lassen, so würde die Möglichkeit vorliegen, dass $d=0$ sei; alsdann aber würde das erste Glied rechter Hand in Formel (76.) nicht mehr verschwinden.

woraus z. B. folgt, dass E für $q=0$ den Werth $\frac{2(2p-1)}{p}$ annimmt. Den Werth von E für $p=0$ untersuchen zu wollen, würde keinen Sinn haben, weil bei unserer augenblicklichen Betrachtung der Fall $p=0$ [vergl. (75.)] excludirt ist.

Um andererseits Δ zu finden, müssen wir zur Formel (67.):

$$P_p Q_q = \Delta J_{-(d+1)} + \mathsf{E} J_{d-1} \tag{78.}$$

zurückgreifen. Die *linke* Seite derselben kann [vergl. (3.), (4.), Seite 1] auch so geschrieben werden:

$$P_p R_q - P_p P_q \log \frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

oder mit Rücksicht auf (64.) auch so:

$$P_p R_q - \mathsf{A} J_s \log \frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

also, falls man für J_s den Werth (61.) substituirt, auch so:

$$P_p R_q - \mathsf{A}\,[P_s + \alpha P_{s-2} + \beta P_{s-4} + \cdots] \log \frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

oder (was daselbe ist) auch so:

$$P_p R_q + \mathsf{A}\Big[\Big(R_s - P_s \log \frac{\sigma-1}{\sigma+1}\Big) + \alpha\Big(R_{s-1} - P_{s-2} \log \frac{\sigma-1}{\sigma+1}\Big) + \cdots\Big] - \mathsf{A}\Big[R_s + \alpha R_{s-2} + \cdots\Big],$$

oder endlich [vergl. wieder (3.), (4.), Seite 1] auch so:

$$P_p R_q + \mathsf{A}\,[Q_s + \alpha Q_{s-2} + \cdots] - A\,[R_s + \alpha R_{s-2} + \cdots]. \tag{α.}$$

Was ferner die *rechte* Seite der Formel (78.) betrifft, so kann dieselbe nach (61.) und (61.[a]) folgendermassen dargestellt werden:

$$\Delta A\,[Q_s + \alpha^0 Q_{s-2} + \beta^0 Q_{s-4} + \cdots] + \mathsf{E}\,[P_{d-1} + \alpha''' P_{d-3} + \cdots]. \tag{β.}$$

Die beiden Ausdrücke (α.) und (β.) müssen also nach (78.) einander gleich sein. Folglich müssen in diesen Ausdrücken diejenigen Terme einander gleich sein, welche mit den Kugelfunctionen *zweiter Art* behaftet sind, ebenso andererseits diejenigen, welche von diesen Functionen frei sind. Demgemäss erhält man die beiden Gleichungen:

$$\mathsf{A}\,[Q_s + \alpha Q_{s-2} + \cdots] = \Delta A\,[Q_s + \alpha^0 Q_{s-2} + \cdots], \tag{γ.}$$

$$P_p R_q - \mathsf{A}\,[R_s + \alpha R_{s-2} + \cdots] = \mathsf{E}\,[P_{d-1} + \alpha''' P_{d-3} + \cdots]. \tag{δ.}$$

Aus (γ.) aber folgt sofort: $\mathsf{A} = \Delta A$, mithin [vergl. (72.)]:

$$\Delta = \frac{\mathsf{A}}{A} = f(q)\,\frac{(p+1)(p+2)\cdots s}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2s-1)}\,\frac{1}{A}, \tag{79.}$$

oder, falls man für A seinen Werth [vergl. (61.[a]) und namentlich auch (50.)] substituirt, und reducirt:

$$\Delta = f(q) \frac{(d+1)(d+2)\cdots p}{(2d+3)(2d+5)\cdots(2p+1)}, \tag{80.}$$

also schliesslich mit Rücksicht auf (74.):

$$\Delta = \Gamma. \tag{81.}$$

Demgemäss können die Gleichungen (66.), (67.) auch *so* geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Q_p P_q &= \Gamma J_{-(d+1)}, \\ P_p Q_q &= \Gamma J_{-(d+1)} + \mathrm{E} J_{d-1}. \end{aligned} \tag{82.}$$

Subtrahiren wir diese Gleichungen, und erinnern wir uns dabei an die der gegenwärtigen Betrachtung zu Grunde liegende Voraussetzung (75.), so gelangen wir zu dem Resultat,

dass unter der Voraussetzung $p > q$ (nicht $= q$) die Formel stattfindet:

$$P_p Q_q - Q_p P_q = \mathrm{E} J_{d-1}, \tag{83.}$$

wo die Constante E den in (77.) angegebenen Werth hat.

§ 5.

Vervollständigung der erhaltenen Resultate.

Um die *definitiven* Formeln für die Entwicklungen der Producte $P_p P_q$, $Q_p Q_q$, $\cdots$ zu erhalten, haben wir nur noch die schon gefundenen Resultate mit einander zu verbinden. Dabei wird es der Kürze und auch der Präcision willen gut sein, Gebrauch zu machen von der schon eingeführten Function $f(n)$, Seite 119, welche in doppelter Weise definirt werden kann, nämlich entweder durch die *drei* Formeln:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ f(0) &= 1, \\ f(1) &= 1, \end{aligned} \tag{1.}$$

oder statt dessen auch durch die *eine* Formel:

$$P_n(\sigma) = f(n) \cdot \sigma^n \left[1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \sigma^{-2} + \cdots \right]. \tag{2.}$$

Erstens: das Product $P_p P_q$. — Substituirt man in der auf Seite 118 erhaltenen Gleichung:

$$P_p P_q = \mathrm{A} J, \tag{3.}$$

für J_s und A ihre Werthe, Seite 105 und 120, so erhält man die *definitive* Formel:

(Tab. A. 1) [vorausgesetzt: $p \geqq q$, ferner $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$P_p P_q = f(q) \frac{(p+1)(p+2)\cdots s}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2s-1)} \left[P_s + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2s+1}{2s}\right)\left\{\frac{2s-3}{2s+1}\right\} P_{s-2} + \cdots \right],$$

welche in (Tabelle A. 1) in ausführlicher Weise angegeben ist. Hier sei nur noch bemerkt, dass der *vor* der eckigen Klammer stehende Zahlenfactor, wie aus dem Werthe der Constanten A (Seite 120) folgt, auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{f(p)\, f(q)}{f(s)},$$

eine Schreibweise, welche für gewisse kritische Fälle sehr bequem ist. So z. B. ergiebt sich aus dieser Darstellungsweise des Factors augenblicklich, dass derselbe, wenn $q = 0$, mithin $p = d = s$ ist, den Werth 1 annimmt.

Will man in dieser Formel (Tab. A. 1) die Glieder nicht nach den fallenden, sondern nach den *steigenden* Indices der P geordnet haben, so hat man zurückzugehen zur Gleichung (3.), und daselbst für A wiederum den Werth Seite 120, für J_s hingegen den Werth Seite 106 zu substituiren. Man erhält alsdann folgende Parallelformel:

(Tab. A'. 1) [wiederum vorausgesetzt: $p \geqq q$, ferner $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$P_p P_q = f(q) \frac{(d+1)(d+2)\cdots p}{(2d+3)(2d+5)\cdots(2p+1)} \left[P_d + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2d+1}{2d+2}\right)\left\{\frac{2d+5}{2d+1}\right\} P_{d+2} + \cdots \right],$$

welche man ausführlicher in der (Tabelle A'. 1) angegeben findet.

Beispiel. Die Correctheit der eben erhaltenen Formeln (Tab. A. 1) und (Tab. A'. 1) lässt sich leicht an einfachen Beispielen prüfen. Setzt man $q = 1$, so giebt jede der beiden Formeln:

$$(4.) \qquad P_p P_1 = \sigma P_p = \frac{1}{2p+1} \left[p P_{p-1} + (p+1) P_{p+1} \right], \qquad \text{[vorausgesetzt: } p \geqq 1]$$

und dies ist eine bekannte recurrente Relation der Kugelfunctionen (vergl. Seite 61). Mittelst derselben lässt sich leicht eine Relation herstellen, welche $\sigma^2 P_p$ linear durch P_{p-2}, P_p und P_{p+2} ausdrückt. Diese letztere nimmt, falls man auf beiden Seiten die Grösse $\frac{1}{3} P_p$ subtrahirt, die Gestalt an:

$$(5.) \left(\sigma^2 - \frac{1}{3}\right) P_p = \frac{(p+1)(p+2)}{(2p+1)(2p+3)} \left[P_{p+2} + \frac{2}{3} \frac{p}{p+2} \frac{2p+1}{2p-1} P_p + \frac{p(p-1)}{(p+1)(p+2)} \frac{2p+3}{2p-1} P_{p-2} \right];$$

und zu genau demselben Resultat gelangt man andererseits auch dadurch, dass man in der Formel (Tab. A. 1) die Zahl $q = 2$ setzt.

Zweitens: das Product $Q_p Q_q$. — Substituirt man in der auf Seite 118 gefundenen Gleichung

$$Q_p Q_q = \mathsf{B} J_{-(s+2)} \tag{6.}$$

für $J_{-(s+2)}$ und B ihre Werthe Seite 107 und 120, so gelangt man zu der definitiven Formel:

(Tab. C. 1.) [zur Abkürzung gesetzt: $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$Q_p Q_q = \frac{2}{(2q+1)f(q)} \frac{(2p+3)(2p+5)\cdots(2s+3)}{(p+1)(p+2)\cdots(s+1)} \left[Q_{s+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2s+3}{2s+4}\right)\left\{\frac{2s+7}{2s+3}\right\} Q_{s+3} + \cdots \right],$$

welche ausführlicher in (Tabelle C. 1) angegeben ist. Bemerkt sei, dass der *vor* der eckigen Klammer stehende Zahlenfactor auch so geschrieben werden kann:

$$2 \frac{(s+2)\, f(s+2)}{(p+1)\, f(p+1) \cdot (q+1)\, f(q+1)},$$

wie solches aus dem Werthe von B (Seite 120) unmittelbar hervorgeht. — In der Ueberschrift dieser Formel ist die Note $p \geqq q$ *unterblieben.* In der That erkennt man aus der Symmetrie der Formel in Bezug auf p und q sofort, dass dieselbe gültig ist für *alle* Fälle, einerlei, ob p grösser, gleich oder kleiner als q ist.

Beispiel. Um die Correctheit dieser Formel (Tab. C. 1) an einem Beispiele zu prüfen, setze man $p = 0$, $q = 1$; wodurch sich ergiebt:

$$Q_0 Q_1 = 2 \left[\frac{5}{2 \cdot 1} Q_2 + \frac{9}{3 \cdot 3} Q_4 + \frac{13}{4 \cdot 5} Q_6 + \frac{17}{5 \cdot 7} Q_8 + \cdots \right]. \tag{7.}$$

Setzt man hier auf der rechten Seite:

$$Q_2 = 2 \left[\frac{2}{3 \cdot 5} \sigma^{-3} + \frac{4}{5 \cdot 7} \sigma^{-5} + \frac{6}{7 \cdot 9} \sigma^{-7} + \frac{8}{9 \cdot 11} \sigma^{-9} + \cdots \right],$$

$$Q_4 = 2 \left[\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9} \sigma^{-5} + \frac{4 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11} \sigma^{-7} + \frac{6 \cdot 8}{9 \cdot 11 \cdot 13} \sigma^{-9} + \cdots \right],$$

$$Q_6 = 2 \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} \sigma^{-7} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} \sigma^{-9} + \cdots \right],$$

$$Q_8 = 2 \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17} \sigma^{-9} + \cdots \right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so erhält man:

$$Q_0 Q_1 = 4 \left[\frac{1}{3} \sigma^{-3} + \frac{14}{5 \cdot 9} \sigma^{-5} + \frac{29}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sigma^{-7} + \frac{388}{7 \cdot 9 \cdot 25} \sigma^{-9} + \cdots \right]; \tag{8.}$$

und zu *demselben* Resultat gelangt man durch directe **Multiplication** von Q_0 mit Q_1.

Zweites Beispiel. Eben so leicht direct nachweisbar ist die aus der Formel (Tab. C. 1) für $p = 0$ und $q = 0$ sich ergebende Gleichung:

$$(9.)\qquad Q_0\,Q_0 = \left(\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^2 = 4\left[\frac{3}{1\cdot 2}\,Q_1 + \frac{7}{3\cdot 4}\,Q_3 + \frac{11}{5\cdot 6}\,Q_5 + \cdots\right].$$

Drittens: das Product $Q_p P_q$. — Substituirt man in die auf Seite 118 erhaltene Gleichung:

$$(10.)\qquad Q_p\,P_q = \Gamma\, J_{-(d+1)}$$

für $J_{-(d+1)}$ und Γ ihre Werthe Seite 108 und 121, so erhält man die definitive Formel:

(Tab. B′. 1) [vorausgesetzt: $p > q$; ferner $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$Q_p\,P_q = f(q)\,\frac{(d+1)(d+2)\cdots p}{(2d+3)(2d+5)\cdots(2p+1)}\left[Q_d + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\left(\frac{2d+1}{2d+2}\right)\left\{\frac{2d+5}{2d+1}\right\}Q_{d+2} + \cdots\right],$$

welche ausführlicher sich angegeben findet in (Tabelle B′. 1). Bemerkt mag werden, dass der *vor* der eckigen Klammer stehende Zahlenfactor sich auch *so* darstellen lässt:

$$\frac{(d+1)\,f(d+1)\cdot f(q)}{(p+1)\,f(p+1)},$$

wie solches aus dem Werth der Constanten Γ (Seite 121) sofort ersichtlich ist.

Will man in dieser Formel (Tab. B′. 1) die Glieder nicht nach den steigenden, sondern nach den *fallenden* Indices der Q geordnet haben, so hat man zurückzugreifen zur Gleichung (10.), und daselbst wiederum für Γ den Werth Seite 121, hingegen für $J_{-(d+1)}$ den Werth Seite 108 (unten) zu substituiren. Alsdann ergiebt sich folgende Formel:

(Tab. B. 1) [vorausgesetzt: $p > q$; ferner $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$Q_p\,P_q = f(q)\,\frac{(p+1)(p+2)\cdots s}{(2p+1)(2p+3)\cdots(2s-1)}\left[Q_s + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q}{2q-1}\right)\left(\frac{2s+1}{2s}\right)\left\{\frac{2s-3}{2s+1}\right\}Q_{s-2} + \cdots\right],$$

welche sich ausführlicher vorfindet in (Tabelle B. 1). — Man bemerkt, dass die Coefficienten in dieser Formel (Tab. B. 1) *identisch* sind mit denen in (Tab. A. 1), und dass ebenso auch Identität stattfindet zwischen den Coefficienten in (Tab. B′. 1) und (Tab. A′. 1); und gelangt daher zu folgendem Satz:

Ist $p > q$, so werden die Entwicklungen der beiden Producte $P_p P_q$ und $Q_p P_q$ lauten:

$$(f.)\quad \begin{aligned} P_p P_q &= \mathfrak{A} P_s + \mathfrak{B} P_{s-2} + \mathfrak{C} P_{s-4} + \cdots\cdots + \mathfrak{R} P_d, \\ Q_p P_q &= \mathfrak{A} Q_s + \mathfrak{B} Q_{s-2} + \mathfrak{C} Q_{s-4} + \cdots \quad + \mathfrak{R} Q_d, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots \mathfrak{R}$ *constante* (von p und q abhängende) *Coefficienten vorstellen, die in beiden Entwicklungen dieselben sind.* So werden z. B., was den Fall $p = q$ betrifft, die Entwicklungen von $[P_p]^2$ und $Q_p P_p$ lauten:

$$(g.)\quad \begin{aligned} [P_p]^2 &= \mathfrak{a} P_{2p} + \mathfrak{b} P_{2p-2} + \mathfrak{c} P_{2p-4} + \cdots\cdots + \mathfrak{k} P_0, \\ Q_p P_p &= \mathfrak{a} Q_{2p} + \mathfrak{b} Q_{2p-2} + \mathfrak{c} Q_{2p-4} + \cdots \quad + \mathfrak{k} Q_0, \end{aligned}$$

wo wiederum die (von p abhängenden) constanten Coefficienten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots \mathfrak{k}$ in beiden Entwicklungen *dieselben* sind.

Beispiel für die Formeln (Tab. B. 1) *und* (Tab. B'. 1). — Bringt man diese Formeln auf den Specialfall $q = 1$ in Anwendung, so ergiebt sich aus der einen wie aus der anderen:

$$(11.)\quad Q_p P_1 = \frac{1}{2p+1}\Big[(p+1) Q_{p+1} + p Q_{p-1}\Big];$$

und dies ist, weil $P_1 = \sigma$ ist, die bekannte recurrente Relation der Q (Seite 65):

$$(12.)\quad \sigma Q_p = \frac{1}{2p+1}\Big[(p+1) Q_{p+1} + p Q_{p-1}\Big].$$

Aus dieser recurrenten Relation lässt sich die Formel ableiten:

$$(13.)\quad \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\sigma^2 - \frac{1}{3}\right) Q_p = \frac{3}{2}\left[\frac{p(p-1)}{(2p-1)(2p+1)} Q_{p-2} + \frac{2}{3}\,\frac{p(p+1)}{(2p-1)(2p+3)} Q_p + \frac{(p+1)(p+2)}{(2p+1)(2p+3)} Q_{p+2}\right],$$

deren linke Seite identisch ist mit $P_2 Q_p$. — Zu genau demselben Werthe von $P_2 Q_p$ führen aber auch die Formeln (Tab. B. 1) und (Tab. B'. 1) in ganz *directer* Weise, nämlich dadurch, dass man in ihnen $q = 2$ setzt.

Viertens: das Product $P_p Q_q$. — Bei der Behandlung dieses Productes können wir uns, aus dem früher angegebenen Grunde, [vergl. (67.ᵃ), Seite 119] beschränken auf den Fall

$$(14.)\quad p - q > 0 \text{ (nicht } = 0).$$

Alsdann aber gilt die auf Seite 123 gefundene Gleichung:

$$(15.)\quad P_p Q_q = P_q Q_p + \mathsf{E} J_{d-1},$$

$$\text{wo: } \mathsf{E} = \frac{2}{(2q+1) f(q)} \cdot \frac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{d(d+1)(d+2)\cdots\cdots p} = \frac{2 f(p)}{(2q+1) f(q)\cdot f(d-1)}.$$

Substituirt man in diese Gleichung (15.) nicht nur den Werth von E, sondern auch den auf Seite 110 (56.) für J_{d-1} erhaltenen Werth, so ergiebt sich die definitive Formel:

(Tab. D. 1) [vorausgesetzt: $p - q > 0$ (nicht $= 0$); ferner $p + q = s$, und $p - q = d$.]

$$P_p Q_q = Q_p P_q + \frac{2}{(2q+1)f(q)} \frac{(2d-1)(2d+1)\cdots(2p-1)}{d(d+1)\cdots p} \left[P_{d-1} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\left(\frac{2q+2}{2q+3}\right)\left(\frac{2d-1}{2d-2}\right)\left\{\frac{2d-5}{2d-1}\right\} P_{d-3} + \cdots \right],$$

welche ausführlicher angegeben ist in Tab. D. 1. Bemerkt mag sein, dass der *vor* der eckigen Klammer stehende Zahlenfactor sich auch so darstellen lässt:

$$\frac{2 f(p)}{(2q+1) f(q) \cdot f(d-1)},$$

oder (was dasselbe ist) auch so:

$$\frac{2 f(p)}{(q+1) f(q+1) \cdot f(d-1)},$$

wie sich solches sofort ergiebt mit Rücksicht auf den für E erhaltenen Werth [vergl. (15.)].

Will man diese Formel (Tab. D. 1) geordnet haben nach den *steigenden* Indices der P, so hat man von Neuem zurückzugehen auf die Gleichung (15), und daselbst für J_{d-1} die auf Seite 110 in (58.) und (60.) angegebenen beiden Ausdrücke zu substituiren, — den einen oder den anderen, jenachdem d *ungerade* oder *gerade* ist. Und gleichzeitig hat man für E wiederum den bei (15.) aufgeführten Werth einzusetzen. In solcher Weise ergiebt sich

(Tab. D'. 1) falls $p - q$ *ungerade* und > 0 (nicht $= 0$) ist:

$$P_p Q_q = Q_p P_q + \frac{4}{d(s+1)} \left[P_0 + \left\{\frac{5}{1}\right\} \left(\frac{d-1}{d-2}\right) \left(\frac{d+1}{d+2}\right) \left(\frac{s}{s-1}\right) \left(\frac{s+2}{s+3}\right) P_2 + \cdots\cdots \right],$$

(Tab. D''. 1) und andererseits, wenn $p - q$ *gerade* und > 0 (nicht $= 0$) ist:

$$P_p Q_q = Q_p P_q + \frac{3 \cdot 4 \cdot d(s+1)}{(d-1)(d+1)s(s+2)} \left[P_1 + \left\{\frac{7}{3}\right\} \left(\frac{d-2}{d-3}\right)\left(\frac{d+2}{d+3}\right)\left(\frac{s-1}{s-2}\right)\left(\frac{s+3}{s+4}\right) P_3 + \cdots\cdots \right].$$

Genauer findet man diese Formeln in (Tab. D'. 1) und in (Tab. D''. 1).

Zur Orientirung über den Gebrauch der Formeln (Tab. B. 1 und B'. 1) **und** (Tab. D. 1, D'. 1 und D''. 1) mögen sämmtliche Producte von der Form PQ in drei Classen gesondert werden, nämlich

(16.)
1. in solche, bei denen der Index von Q der höhere ist,
2. in solche, bei denen beide Indices gleich gross sind,
3. in solche, bei denen der Index von P der höhere ist.

Die Formeln (Tab. B. und B'.) geben alsdann die Entwicklungen für alle Producte der 1. und 2. Classe. Andererseits liefern die Formeln (Tab. D., D'. und D''.) für jedes Product der 3. Classe z. B. für $P_9 Q_3$ einen Ausdruck von der Form:

$$P_9 Q_3 = P_3 Q_9 + \Omega,$$

wo der zweite Term Ω eine fertig hingeschriebene Entwicklung nach Kugelfunctionen vorstellt, während der erste Term $P_3 Q_9$ ein Product der 1. Classe repräsentirt, mithin seiner Entwicklung nach sofort mittelst der Formeln (Tab. B. und B'.) angegeben werden kann. — — *Die Formeln sind also ausreichend zur Entwicklung sämmtlicher Producte PQ.*

Beispiel für die Formeln (Tab. D. 1, D'. 1 und D''. 1). — Um das Product $P_3(\sigma) Q_1(\sigma)$ in eine nach den Potenzen von σ fortschreitende Reihe zu entwickeln, braucht man nur die beiden Functionen

$$(17.)\quad \begin{aligned} P_3(\sigma) &= \frac{3\cdot 5}{2\cdot 3}\left[\sigma^3 - \frac{3}{5}\sigma\right], \\ Q_1(\sigma) &= 2\left[\frac{1}{3}\sigma^{-2} + \frac{1}{5}\sigma^{-4} + \frac{1}{7}\sigma^{-6} + \cdots\right] \end{aligned}$$

mit einander zu multipliciren; man erhält alsdann:

$$(18.)\quad P_3(\sigma) Q_1(\sigma) = \frac{5}{3}\sigma + 4\left[\frac{1}{5\cdot 7}\sigma^{-3} + \frac{2}{7\cdot 9}\sigma^{-5} + \frac{3}{9\cdot 11}\sigma^{-7} + \frac{4}{11\cdot 13}\sigma^{-9} + \cdots\right].$$

Nun erhält man aber andererseits aus (Tab. D. 1) und mit Hinzuziehung von (Tab. B'. 1) die Formel:

$$(19.)\quad P_3 Q_1 = \frac{4}{7}\left(Q_4 + \frac{3}{4} Q_2\right) + \frac{5}{3} P_1;$$

und hieraus ergiebt sich, falls man für Q_2 und Q_4 ihre Werthe (Seite 125) substituirt, *ebenfalls* die Formel (18.).

Dieses Beispiel zeigt anschaulich den Grund, warum der Ausdruck für das Product $P_p Q_q$ im Falle $p > q$ Kugelfunctionen erster und zweiter Art enthalten muss.

Zweites Beispiel. Setzt man $q = p - 1$, mithin $d = 1$ und $s = 2p - 1$, so ergiebt sich aus (Tab. D'. 1):

$$(20.)\quad P_p Q_{p-1} - P_{p-1} Q_p = \frac{2}{p} P_0 = \frac{2}{p}.$$

Setzt man ferner $q = p - 2$, mithin $d = 2$ und $s = 2p - 2$, so folgt aus (Tab. D''. 1):

$$(21.)\quad P_p Q_{p-2} - P_{p-2} Q_p = \frac{2(2p-1)}{p(p-1)} P_1 = \frac{2(2p-1)}{p(p-1)}\sigma.$$

Diese Gleichungen (20.), (21.) aber sind identisch mit zwei schon früher aufgestellten recurrenten Relationen. [Vergl. die Formeln (a.) und (b.) auf Seite 71.]

Drittes Beispiel. Bringt man die Formel (Tab. D. 1) auf den Specialfall $q = 0$ in Anwendung, und beachtet man, dass $P_0(\sigma) = 1$ und $Q_0(\sigma) = -\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ ist, so erhält man:

$$(22.)\quad -P_p \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1} = Q_p + 2\left[\frac{2p-1}{p} P_{p-1} + \frac{1}{3}\,\frac{2p-5}{p-1} P_{p-3} + \frac{1}{5}\,\frac{2p-9}{p-2} P_{p-5} + \cdots\right];$$

hieraus aber folgt durch Vergleichung mit der bekannten Formel:

$$(22.^a)\quad Q_p = R_p - P_p \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$$

sofort:

$$(23.)\quad R_p = -2\left[\frac{2p-1}{p} P_{p-1} + \frac{1}{3}\,\frac{2p-5}{p-1} P_{p-3} + \frac{1}{5}\,\frac{2p-9}{p-2} P_{p-5} + \cdots\right],$$

wo das *letzte* Glied, ebenso wie in (Tab. D. 1) und (22.), mit P_0 resp. P_1 behaftet sein wird. — Wir sehen somit, dass die allgemeine Formel (Tab. D. 1) zur *Entwicklung der Function R_p nach Kugelfunctionen* uns hinleitet.

Viertes Beispiel. Ersetzt man in (Tab. D. 1) die Functionen Q durch ihre logarithmischen Ausdrücke (22.ᵃ), so heben sich die mit $\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ behafteten Glieder fort, und man erhält:

$$(24.)\quad P_p R_q = P_q R_p + \mathfrak{L} P_{d-1} + \mathfrak{M} P_{d-3} + \mathfrak{N} P_{d-5} + \cdots\cdots,$$

wo $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots\cdots$ die in (Tab. D.) angegebenen Constanten bezeichnen. Hieraus ergeben sich sofort folgende [mit (20.), (21.) correspondirenden] recurrente Relationen der R:

$$(25.)\quad P_p R_{p-1} - P_{p-1} R_p = \frac{2}{p},$$

$$(26.)\quad P_p R_{p-2} - P_{p-2} R_p = \frac{2(2p-1)}{p(p-1)}\,\sigma.$$

Noch sei bemerkt, dass die Gleichung (24.) für $q = 0$ in die Formel (23.) sich verwandelt.

§ 5.ᵃ

Beiläufige Betrachtungen.

Wirft man einen Blick auf die Tabellen A, B, A′, B′ und C, so bemerkt man sofort, dass die bereits von uns abgeleiteten Formeln

(Tab. A. 1, B. 1, A'. 1, B'. 1, C. 1)

für den *Specialfall:* $p = q$ übergehen in die Formeln:

(Tab. A. 5, B. 5, A'. 5, B'. 5, C. 5).

Was diese letztern Formeln betrifft, so sei bemerkt, dass aus (Tab. A'. 5) für $p = 0, 1, 2, 3, \cdots$ folgende einfache Entwicklungen sich ergeben:

$$[P_0]^2 = P_0,$$

$$[P_1]^2 = \frac{1}{3}\left[P_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{1}\,\frac{4}{5}\,5\,P_2\right],$$

$$(1.)\quad [P_2]^2 = \frac{1}{5}\left[P_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{3}\,\frac{6}{7}\,5\,P_2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\,\frac{6\cdot 8}{7\cdot 9}\,9\,P_4\right],$$

$$[P_3]^2 = \frac{1}{7}\left[P_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{6}{5}\,\frac{8}{9}\,5\,P_2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\,\frac{8\cdot 10}{9\cdot 11}\,9\,P_4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\,\frac{8\cdot 10\cdot 12}{9\cdot 11\cdot 13}\,13\,P_6\right],$$

. . . .

Ebenso ergeben sich aus (Tab. B'. 5) die analogen Entwicklungen:

$$P_0\,Q_0 = Q_0,$$

$$P_1\,Q_1 = \frac{1}{3}\left[Q_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{1}\,\frac{4}{5}\,5\,Q_2\right],\ ^{*)}$$

$$(2.)\quad P_2\,Q_2 = \frac{1}{5}\left[Q_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{3}\,\frac{6}{7}\,5\,Q_2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\,\frac{6\cdot 8}{7\cdot 9}\,9\,Q_4\right],$$

$$P_3\,Q_3 = \frac{1}{7}\left[Q_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{6}{5}\,\frac{8}{9}\,5\,Q_2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}\,\frac{8\cdot 10}{9\cdot 11}\,9\,Q_4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\,\frac{8\cdot 10\cdot 12}{9\cdot 11\cdot 13}\,13\,Q_6\right],$$

. . . .

Endlich sei bemerkt, dass aus (Tab. C. 5) für $p = 0$ folgende Formel resultirt**):

$$(3.)\quad \left[\log\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right]^2 = 4\left[\frac{3}{1\cdot 2}\,Q_1(\sigma) + \frac{7}{3\cdot 4}\,Q_3(\sigma) + \frac{11}{5\cdot 6}\,Q_5(\sigma) + \frac{15}{7\cdot 8}\,Q_7(\sigma) + \cdots \text{ in inf.}\right].$$

Anwendung der für $[Q_p]^2$ erhaltenen Entwicklung. Ist, wie wir annehmen wollen, $\sigma^2 < 1$, so besitzt die Function $Q_n(\sigma)$ oder Q_n einen complexen Werth:

$$(8.)\quad Q_n = U_n - P_n \log(-1), \qquad \text{[vergl. Seite 48]}$$

wo das erste Glied U_n eine *reelle* Grösse bezeichnet von dem Werth:

$$(9.)\quad U_n = R_n - P_n \log\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma};$$

---

*) Diese Formel lässt sich einfacher so schreiben:

$$\sigma\,Q_1 = \tfrac{1}{3}(Q_0 + 2\,Q_2),$$

und ist also ein Specialfall der recurrenten Formel (I.b), Seite 65.

**) Es ist nämlich $Q_0 = -\log\dfrac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$. Vergl. die nächstfolgende Note.

während das zweite Glied $P_n \log(-1)$ *rein imaginär* ist*). Substituirt man nun in der Formel (Tab. C. 5):

$$[Q_p]^2 = \alpha Q_{2p+1} + \beta Q_{2p+3} + \gamma Q_{2p+5} + \cdots \quad (10.)$$

für sämmtliche Q (links und rechts) die durch (8.) dargebotenen Werthe, und sondert sodann das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich die beiden Formeln:

$$2 U_p P_p = \alpha P_{2p+1} + \beta P_{2p+3} + \gamma P_{2p+5} + \cdots = \Psi(\sigma), \quad (11.^a)$$

$$[U_p]^2 + [P_p \log(-1)]^2 = \alpha U_{2p+1} + \beta U_{2p+3} + \gamma U_{2p+5} + \cdots = \Omega(\sigma), \quad (11.^b)$$

deren rechte Seiten für den Augenblick mit $\Psi(\sigma)$ und $\Omega(\sigma)$ bezeichnet sein mögen, wo σ das in den Functionen U, P enthaltene Argument repräsentirt. — Bekanntlich ist:

$$Q_n(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{\sigma - z}, \quad (\alpha.)$$

folglich:

$$U_n(\sigma) = \text{Rth}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{\sigma - z}\right\}; \text{**)} \quad (\beta.)$$

und dieselbe Beziehung wird daher auch stattfinden zwischen Ω und Ψ. Man erhält also:

---

*) Man hat im Ganzen folgende Formeln (vergl. Seite 2):

$$Q_n = R_n - P_n \log\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}, \qquad Q_n = U_n - P_n \log(-1),$$

$$U_n = R_n - P_n \log\frac{1-\sigma}{1+\sigma},$$

und $R_n = -2\left[\frac{2n-1}{n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots (\text{letztes Gl. } P_0 \text{ resp. } P_1)\right]$, wo das letzte Glied, abgesehen von einem Zahlenfactor, durch P_0 resp. P_1 dargestellt ist. Hieraus folgt z. B.:

$$R_0 = 0; \qquad R_1 = -2,$$

$$Q_0 = -\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}, \qquad Q_1 = -2 - \sigma \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

$$U_0 = -\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma}, \qquad U_1 = -2 - \sigma\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma};$$

was zur besseren Orientirung dienen mag bei den weiter folgenden Betrachtungen. — Aus dem Werthe von Q_0 folgt, wie beiläufig bemerkt sein mag:

$$Q_0' = \frac{2}{1-\sigma^2} \quad \text{und} \quad Q_{01} = \frac{2}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

**) Ist nämlich W eine complexe Grösse: $W = U + iV$, so mag U als Rth W, und iV als Jth W bezeichnet werden.

$$(\gamma.)\qquad \Omega(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(z)\,\partial z}{\sigma - z},$$

oder, falls man Ω und Ψ durch die linken Seiten der Gleichungen (11.[a, b]) ersetzt:

$$(11.^{c})\qquad [U_p(\sigma)]^2 + [P_p(\sigma)\log(-1)]^2 = \text{Rth}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{2\, U_p(z)\, P_p(z)\,\partial z}{\sigma - z}\right\}.$$

All' diese Formeln (11.[a, b, c]) können sofort *fix und fertig* hingeschrieben werden; denn man hat zu diesem Zwecke nur noch für die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ ihre aus (Tab. C. β) ersichtlichen Werthe zu substituiren.

Um über die Bedeutung dieser Formeln (11.[a, b, c]) einigermassen uns zu orientiren, wird es gut sein, sie für den *einfachsten* Fall, nämlich $p = 0$, einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Für $p = 0$ werden die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ identisch mit den schon in (3.) angegebenen, die Formeln (11.[a, b, c]) also folgendermassen lauten:

$$(12.^{a})\qquad -2\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma} = 4\left[\frac{3}{1\cdot 2}P_1(\sigma) + \frac{7}{3\cdot 4}P_3(\sigma) + \frac{11}{5\cdot 6}P_5(\sigma) + \cdots\right],$$

$$(12.^{b})\qquad \left[\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right]^2 + \left[\log(-1)\right]^2 = 4\left[\frac{3}{1\cdot 2}U_1(\sigma) + \frac{7}{3\cdot 4}U_3(\sigma) + \frac{11}{5\cdot 6}U_5(\sigma) + \cdots\right],$$

$$(12.^{c})\qquad = \text{Rth}\left\{(-2)\int_{-1}^{+1}\left(\log\frac{1-z}{1+z}\right)\frac{\partial z}{\sigma - z}\right\}.$$

Ueber die Entwicklung (12.[a]). — Die Richtigkeit derselben lässt sich auf directem Wege darthun. Entwickelt man nämlich $(1+\sigma)^q$ nach Kugelfunctionen erster Art, so erhält man:

$$(\alpha.)\qquad \left(\frac{1+\sigma}{2}\right)^q = \frac{1}{q+1}P_0 + \frac{q}{(q+1)(q+2)}3P_1 + \frac{q(q-1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}5P_2 + \cdots\cdots;$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man nach q differenzirt, und sodann $q = 0$ setzt:

$$(\beta.)\qquad \log\frac{1+\sigma}{2} = -P_0 + \frac{3}{1\cdot 2}P_1 - \frac{5}{2\cdot 3}P_2 + \frac{7}{3\cdot 4}P_3 - \frac{9}{4\cdot 5}P_4 + \cdots\cdot,$$

oder, falls man σ mit $-\sigma$ vertauscht:

$$(\gamma.)\qquad \log\frac{1-\sigma}{2} = -P_0 - \frac{3}{1\cdot 2}P_1 - \frac{5}{2\cdot 3}P_2 - \frac{7}{3\cdot 4}P_3 - \frac{9}{4\cdot 5}P_4 - \cdots\cdot$$

Aus den beiden letzten Formeln ergiebt sich aber durch Addition respective Subtraction:

$$(\delta.)\qquad \log\frac{1-\sigma^2}{4} = -2\left[P_0 + \frac{5}{2\cdot 3}P_2 + \frac{9}{4\cdot 5}P_4 + \cdots\right],$$

$$(\varepsilon.)\qquad \log\frac{1-\sigma}{1+\sigma} = -2\left[\frac{3}{1\cdot 2}P_1 + \frac{7}{3\cdot 4}P_3 + \frac{11}{5\cdot 6}P_5 + \cdots\right];$$

w. z. z. w.

Ueber die Gleichung (12.b). — Um diese Gleichung zu controliren, kann man für $U_1(\sigma)$, $U_2(\sigma)$, $\cdots$ ihre früher gegebenen Entwicklungen [vergl. (28.), Seite 55, und (32.), Seite 56] anwenden. Man erhält alsdann:

$$(a.)\qquad 4\left[\frac{3}{1\cdot 2}U_1 + \frac{7}{3\cdot 4}U_3 + \frac{11}{5\cdot 6}U_5 + \cdots\right] = 4\left[A + B\sigma^2 + C\sigma^4 + \cdots\right],$$

wo A, B, C, wie man nach einigen Reductionen findet, die Werthe haben:

$$A = -2\left[\frac{3}{1\cdot 2} - \frac{7}{3\cdot 4}\,\frac{2}{3} + \frac{11}{5\cdot 6}\,\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} - \frac{15}{7\cdot 8}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right],$$

$$(b.)\qquad B = \frac{3}{1\cdot 2} - \frac{7}{3\cdot 4}\,\frac{2\cdot 4}{1} + \frac{11}{5\cdot 6}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3} - \frac{15}{7\cdot 8}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5} + \cdots,$$

$$C = 1 + 4\left[\frac{7}{3\cdot 4} - \frac{11}{5\cdot 6}\,\frac{8}{1} + \frac{15}{7\cdot 8}\,\frac{8\cdot 10}{3} - \frac{19}{9\cdot 10}\,\frac{8\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 5} + \cdots\right].$$

Andererseits erhält man:

$$(c.)\qquad \left[\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right]^2 = 4\left[\sigma^2 + \frac{2}{3}\sigma^4 + \frac{23}{45}\sigma^6 + \cdots\right];$$

und nach der Gleichung (12.b) soll also sein:

$$(d.)\qquad \left[\log(-1)\right]^2 + 4\left[\sigma^2 + \frac{2}{3}\sigma^4 + \frac{23}{45}\sigma^6 + \cdots\right] = 4\left[A + B\sigma^2 + C\sigma^4 + \cdots\right],$$

d. i.

$$(e.)\qquad 4A = \left[\log(-1)\right]^2, \qquad B = 1, \qquad C = \frac{2}{3}, \text{ etc. etc.}$$

Nun kann man die Reihe für B in *zwei* Reihen zerlegen:

$$B = \frac{1}{1}2 - \frac{1}{3}\,\frac{2\cdot 4}{1} + \frac{1}{5}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3} - \frac{1}{7}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{2}2 - \frac{1}{4}\,\frac{2\cdot 4}{1} + \frac{1}{6}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3} - \frac{1}{8}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5} + \cdots\cdot$$

Verschiebt man jetzt die untere Reihe um eine Stelle nach links, so zerstören sich die übereinanderstehenden Glieder, und man erhält in der That: $B = 1$, wie in (e.) verlangt war.

Aehnlich kann man auch die Reihe für C in *zwei* Reihen zerlegen:

$$C = 1 + 4\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\,\frac{8}{1} + \frac{1}{7}\,\frac{8\cdot 10}{3} - \frac{1}{9}\,\frac{8\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 5} + \cdots\right]$$
$$+ 4\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\,\frac{8}{1} + \frac{1}{8}\,\frac{8\cdot 10}{3} - \frac{1}{10}\,\frac{8\cdot 10\cdot 12}{3\cdot 5} + \cdots\right];$$

verschiebt man nun die untere Reihe um eine Stelle nach links, und addirt die nach dieser Verschiebung übereinanderstehenden Glieder, so ergiebt sich:

$$C = 2 + 4\left[-1 + \frac{26}{3\cdot5} - \frac{8\cdot34}{3\cdot5\cdot7} + \frac{8.10\cdot42}{3\cdot5\cdot7\cdot9} - \cdots\cdots\right],$$

oder, was dasselbe ist:

$$C = -2 + 4\left[\frac{16}{3\cdot5} - \frac{8\cdot20}{3\cdot5\cdot7} + \frac{8\cdot10.24}{3\cdot5\cdot7\cdot9} - \cdots\cdot\right]$$
$$+ 4\left[\frac{10}{3\cdot5} - \frac{8\cdot14}{3\cdot5\cdot7} + \frac{8\cdot10\cdot18}{3\cdot5\cdot7\cdot9} - \cdots\cdot\right].$$

Verschiebt man jetzt endlich von Neuem die untere Reihe um eine Stelle nach links, so zerstören sich je zwei übereinanderstehende Glieder; so dass man erhält: $C = \frac{2}{3}$, wie in (e.) verlangt wurde.

Beachtenswerth scheint bei dieser Untersuchung die *erste* der in (e.) gefundenen Gleichungen: $[\log(-1)]^2 = 4A$, d. i., falls man den Werth von A, aus (b.), substituirt:

(f.) $$(2n+1)^2\pi^2 = 2\left[\frac{3}{1\cdot2} - \frac{7}{3\cdot4}\,\frac{2}{3} + \frac{11}{5\cdot6}\,\frac{2\cdot4}{3\cdot5} - \frac{15}{7\cdot8}\,\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7} + \cdots\cdots\right],$$

wo n eine noch zu bestimmende *ganze Zahl* bezeichnet.

Ueber die Gleichung (12.^{c}). — Für $\sigma = 0$ reducirt sich die linke Seite dieser Gleichung auf $[\log(-1)]^2$, d. i. auf $[(2n+1)\pi i]^2$, so dass man erhält:

(g.) $$\text{Rth}\left\{2\int_{-1}^{+1}\left(\log\frac{1-z}{1+z}\right)\frac{\partial z}{z}\right\} = -(2n+1)^2\pi^2,$$

wo die von $z = -1$ zu $z = +1$ gehende Integrationscurve so gedacht werden kann, dass sie den Punkt $z = 0$ vermeidet. Dabei sei bemerkt, dass in den *Nouvelles Tables d'Intégrales définies par de Haan* auf pag. 165 sich die Formel findet:

(h.) $$\int_0^1\left(\log\frac{1+z}{1-z}\right)\frac{\partial z}{z} = \frac{\pi^2}{4},$$

woraus folgt:

(h'.) $$2\int_{-1}^{+1}\left(\log\frac{1-z}{1+z}\right)\frac{\partial z}{z} = -\pi^2,$$

was mit der Formel (g.) in Einklang steht.

Allgemeinere Betrachtungen. — Statt der Entwicklung von $[Q_p]^2$ wollen wir gegenwärtig die Entwicklung von $Q_p Q_q$ der Betrachtung zu Grunde legen. Dieselbe lautet nach (Tab. C. 1):

$$(13.)\qquad Q_p Q_q = \mathsf{A}\, Q_{s+1} + \mathsf{B}\, Q_{s+3} + \Gamma\, Q_{s+5} + \cdots \text{ in inf.},$$

und gewinnt durch die Substitution (8.) die Gestalt:

$$(14.)\quad [U_p - P_p \log(-1)]\,[U_q - P_q \log(-1)] = [\mathsf{A}\, U_{s+1} + \mathsf{B}\, U_{s+3} + \cdots] - [\mathsf{A}\, P_{s+1} + \mathsf{B}\, P_{s+3} + \cdots] \log(-1);$$

und hieraus folgen durch Sonderung des Reellen und Imaginären*) die beiden Formeln:

$$(15.^a)\qquad U_p P_q + U_q P_p = \mathsf{A}\, P_{s+1} + \mathsf{B}\, P_{s+3} + \cdots = \Psi(\sigma),$$

$$(15.^b)\qquad U_p U_q + P_p P_q [\log(-1)]^2 = \mathsf{A}\, U_{s+1} + \mathsf{B}\, U_{s+3} + \cdots = \Omega(\sigma),$$

deren rechte Seiten mit $\Psi(\sigma)$ und $\Omega(\sigma)$ bezeichnet sein mögen. Alsdann ist ebenso wie früher [vergl. (α.), (β.), (γ.), Seite 132, 133]:

$$\Omega(\sigma) = \text{Rth}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(z)\,\partial z}{\sigma - z}\right\},$$

also, wenn man Ψ und Ω durch die linken Seiten der Formeln (15.[a, b]) ersetzt:

$$(15.^c)\qquad U_p U_q + P_p P_q [\log(-1)]^2 = \text{Rth}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{[U_p(z)\,P_q(z) + U_q(z)\,P_p(z)]\,\partial z}{\sigma - z}\right\}.$$

Diesen Formeln (15.[a, b, c]) *subsumiren sich die früheren Formeln* (11.[a, b, c]) *und* (12.[a, b, c]) *als specielle Fälle.*

Transformation der Gleichung (15.[c]). — Nach (Tab. D. 1) und (Tab. B. 1) ist:

$$(16.)\quad P_p Q_q - Q_p P_q = \mathfrak{L}\, P_{d-1} + \mathfrak{M}\, P_{d-3} \cdots + \mathfrak{T}\, P_0 \ (\text{resp. } \mathfrak{W}\, P_1), \quad \text{falls } p > q \ (\text{nicht} = q),$$

$$(17.)\qquad Q_p P_q = \mathfrak{A}\, Q_s + \mathfrak{B}\, Q_{s-2} \cdots, \cdots + \mathfrak{K}\, Q_d, \quad \text{falls } p \geqq q.$$

Hieraus folgt:

$$(18.)\quad P_p Q_q + Q_p P_q = \mathfrak{L}\, P_{d-1} + \mathfrak{M}\, P_{d-3} \cdots + \mathfrak{T}\, P_0 \ (\text{resp. } \mathfrak{W}\, P_1) + 2\mathfrak{A}\, Q_s + 2\mathfrak{B}\, Q_{s-2} \cdots + 2\mathfrak{K}\, Q_d, \quad \text{falls } p > q \ (\text{nicht} = q);$$

und gleichzeitig folgt aus (17.) für den Fall $p = q$:

$$(19.)\qquad 2 Q_p P_p = 2\mathfrak{a}\, Q_s + 2\mathfrak{b}\, Q_{s-2} \cdots + 2\mathfrak{k}\, Q_d, \quad \text{wo } s = 2p, \text{ und } d = 0 \text{ ist};$$

so dass man also diese Formel (19.) aus der vorhergehenden (18.) einfach dadurch erhalten kann, dass man die Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{W}$) verschwinden lässt. — Aus (18.) folgt durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

*) Wir halten hier beständig fest an der Voraussetzung $\sigma^2 < 1$.

$$(20.)\qquad P_p\,U_q + U_p\,P_q = \mathfrak{L}\,P_{d-1} + \mathfrak{M}\,P_{d-3}\cdots + \mathfrak{T}\,P_0\ (\text{resp. } \mathfrak{W}\,P_1) + \\ + 2\,\mathfrak{A}\,U_s + 2\,\mathfrak{B}\,U_{s-2}\cdots\cdots + 2\,\mathfrak{K}\,U_d.$$

Substituirt man aber diesen Werth in der rechten Seite der Gleichung (15.[c]), so folgt [mit Rücksicht auf (β.), Seite 132]:

$$(21.)\qquad U_p\,U_q + P_p\,P_q\,[\log(-1)]^2 = \mathfrak{L}\,U_{d-1} + \mathfrak{M}\,U_{d-3}\cdots\cdot + \mathfrak{T}\,U_0\ (\text{resp. } \mathfrak{W}\,U_1) + \\ + \text{Rth}\left\{2\int_{-1}^{+1}\frac{(\mathfrak{A}\,U_s + \mathfrak{B}\,U_{s-2}\cdots + \mathfrak{K}\,U_d)\,\partial z}{\sigma - z}\right\},\quad \text{falls } p > q.$$

Und gleichzeitig erhält man die dem Falle $p = q$ entsprechende Formel aus der eben hingeschriebenen dadurch, dass man die Coefficienten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\cdots$ $\mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{W}$) verschwinden lässt.

Die Werthe der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\cdots$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\cdots\cdot$ sind ersichtlich aus (Tab. A. α) und (Tab. D. ε). Ohne dieselben wirklich zu substituiren, wollen wir die Formel (21.) sofort in Anwendung bringen auf den *Specialfall:* $q = 0$. Alsdann wird $d = s = p$, und

$$\mathfrak{L} = 2\,\frac{2p-1}{1\cdot p},\qquad \mathfrak{M} = 2\,\frac{2p-5}{3\,(p-1)},\qquad \mathfrak{N} = 2\,\frac{2p-9}{5\,(p-2)},\ \cdots$$
$$\mathfrak{A} = 1,\qquad \mathfrak{B} = 0,\qquad \mathfrak{C} = 0,\ \cdots$$

so dass man erhält*):

$$(22.)\quad P_p\Big(\log(-1)\Big)^2 - U_p\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma} = 2\left[\frac{2p-1}{1\cdot p}\,U_{p-1} + \frac{2p-5}{3\,(p-1)}\,U_{p-3} + \frac{2p-9}{5\,(p-2)}\,U_{p-5} + \cdots \text{f}\right] \\ + \text{Rth}\left\{2\int_{-1}^{+1}\frac{U_p(z)\,\partial z}{\sigma - z}\right\},$$

oder, falls man für die U_n ihre Werthe (9.) substituirt**):

$$(23.)\quad P_p\left[\Big(\log(-1)\Big)^2 + \Big(\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\Big)^2\right] = 2\left[R_p\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma} + \frac{2p-1}{1\cdot p}\,R_{p-1} + \frac{2p-5}{3\,(p-1)}\,R_{p-3} + \cdots \text{f}\right] \\ + \text{Rth}\left\{2\int_{-1}^{+1}\frac{U_p(z)\,\partial z}{\sigma - z}\right\}.$$

Andererseits aber kann man der Gleichung (22.), durch Anwendung der Formel (β.), Seite 132, auch folgende Gestalt geben***):

$$(24.)\qquad P_p\Big(\log(-1)\Big)^2 - U_p\,\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma} = \text{Rth}\left\{\int_{-1}^{+1}\frac{[2\,U_p(z) - R_p(z)]\,\partial z}{\sigma - z}\right\}.$$

Diese Gleichung geht für $p = 0$ über in die frühere Gleichung (12.[c]).

---

*) Durch das Zeichen f] in Formel (22.) soll angedeutet sein, dass die Reihe *abbricht (series finita)*, ebenso wie die vorhergehende Reihe (21.).

**) Bei dieser Substitution ist gleichzeitig Rücksicht zu nehmen auf die bekannte Entwicklung von R_n nach Kugelfunctionen, d. i. auf die in der Note, Seite 132, für R_n gegebene Formel.

***) Wiederum unter Anwendung der für R_n geltenden Entwicklung, Note auf Seite 132.

§ 6.

Entwicklung des Productes zweier abgeleiteten Kugelfunctionen ersten Grades.

Setzt man

$$(1.)\qquad Y = UV \qquad \text{und} \qquad Z = (1-\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \sigma}\frac{\partial V}{\partial \sigma},$$

wo U und V die Differentialgleichungen erfüllen:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right) + p(p+1)\,U = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right) + q(q+1)\,V = 0,\end{aligned}$$

so findet, wie wir früher [Seite 94, Formel (3.)] gefunden haben, zwischen Y und Z die Beziehung statt:

$$(3.)\qquad Z = \frac{p(p+1)+q(q+1)}{2}\,Y + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial Y}{\partial \sigma}\right).$$

Sind also, um denselben Satz in etwas anderer Weise auszusprechen, p und q irgend zwei Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, $\cdots$, und bezeichnet man mit Y eins der drei Producte

$$(4.)\qquad Y = P_p\,P_q, \quad Q_p\,Q_q, \quad P_p\,Q_q,$$

ferner mit Z jedesmal das correspondirende Product:

$$(5.)\qquad Z = P_{p1}\,P_{q1}, \quad Q_{p1}\,Q_{q1}, \quad P_{p1}\,Q_{q1},$$

so findet zwischen Y und Z die Relation (3.) statt.

Das Product (4.) sind wir in eine nach Kugelfunctionen fortlaufende Reihe zu entwickeln im Stande:

$$(6.)\qquad Y = \mathfrak{A}\,P_\alpha + \mathfrak{B}\,P_\beta + \cdots + \mathfrak{L}\,Q_\lambda + \mathfrak{M}\,Q_\mu + \cdots$$

Substituiren wir aber diesen Werth in (3.), so ergibt sich für das zugehörige Z der Ausdruck:

$$(7.)\qquad Z = \mathfrak{A}\,(p,q)_\alpha\,P_\alpha + \mathfrak{B}\,(p,q)_\beta\,P_\beta + \cdots + \mathfrak{L}\,(p,q)_\lambda\,Q_\lambda + \mathfrak{M}\,(p,q)_\mu\,Q_\mu + \cdots,$$

wo die constanten Coefficienten $(p, q)_\varkappa$ die Werthe besitzen:

$$(8.)\qquad (p,q)_\varkappa = \frac{p(p+1)+q(q+1)-\varkappa(\varkappa+1)}{2}.$$

Und wir gelangen also zu folgendem Satz:

(9.) *Sind Y und Z irgend zwei entsprechende unter den in (4.), (5.) angegebenen Producten so kann man, wenn die Entwicklung (6.) des einen Productes vorliegt, unmittelbar auch die Entwicklung (7.) des andern Productes hinschreiben. Denn es bedarf dazu nur der Hinzufügung der in (8.) angegebenen constanten Factoren $(p, q)_\varkappa$.*

Erstes Beispiel. — Offenbar ist:

$$P_p\,P_0 = P_p\,.$$

Bringt man auf dieses Product den Satz in Anwendung, so ergiebt sich:

$$P_{p1} P_{01} = (p, 0)_p P_p.$$

Nach (8.) ist aber: $(p, 0)_p = 0$, folglich:

$$P_{p1} P_{01} = 0; \tag{10.}$$

was in der That richtig ist, weil P_{01} verschwindet.

Zweites Beispiel. — Auf Seite 124 war gefunden:

$$P_p P_1 = \frac{p}{2p+1} P_{p-1} + \frac{p+1}{2p+1} P_{p+1}.$$

Somit folgt durch Anwendung des Satzes (9.):

$$P_{p1} P_{11} = \frac{p}{2p+1} (p, 1)_{p-1} P_{p-1} + \frac{p+1}{2p+1} (p, 1)_{p+1} P_{p+1},$$

oder weil, nach (8.), $(p, 1)_{p-1} = p + 1$ und $(p, 1)_{p+1} = -p$ ist:

$$P_{p1} P_{11} = \frac{p(p+1)}{2p+1} \left(P_{p-1} - P_{p+1}\right). \tag{11.}$$

Dies aber ist die recurrente Relation IV, Seite 61.

Drittes Beispiel. Durch Anwendung der allgemeinen Formel (Tab. C. 1) auf den Fall $q = 0$ folgt:

$$Q_p Q_0 = 2 \left[\frac{2p+3}{p+1} Q_{p+1} + \frac{1}{3} \frac{2p+7}{p+2} Q_{p+3} + \frac{1}{5} \frac{2p+11}{p+3} Q_{p+5} + \cdots\right];$$

und der Satz (9.) führt daher in diesem Fall zu dem Resultat:

$$Q_{p1} Q_{01} = 2 \left[\frac{2p+3}{p+1} (p, 0)_{p+1} Q_{p+1} + \frac{1}{3} \frac{2p+7}{p+2} (p, 0)_{p+3} Q_{p+3} + \cdots\right].$$

Nach (8.) haben aber $(p, 0)_{p+1}$, $(p, 0)_{p+3}$, $(p, 0)_{p+5}$, $\cdots$ der Reihe nach die Werthe: $-(p+1)$, $-3(p+2)$, $-5(p+3)$, $\cdots$; und man erhält also:

$$Q_{p1} Q_{01} = -2 \left[(2p+3) Q_{p+1} + (2p+7) Q_{p+3} + (2p+11) Q_{p+5} + \cdots\right],$$

oder, falls man für Q_{p1}, Q_{01} ihre Werthe substituirt*):

$$Q'_p = -\left[(2p+3) Q_{p+1} + (2p+7) Q_{p+3} + (2p+11) Q_{p+5} + \cdots\right]. \tag{12.}$$

Viertes Beispiel. Nach Seite 127 ist:

$$P_1 Q_p = \frac{p}{2p+1} Q_{p-1} + \frac{p+1}{2p+1} Q_{p+1};$$

somit folgt mittelst des Satzes (9.):

$$P_{11} Q_{p1} = \frac{p}{2p+1} (p, 1)_{p-1} Q_{p-1} + \frac{p+1}{2p+1} (p, 1)_{p+1} Q_{p+1},$$

wo die hinzugetretenen constanten Factoren die schon bei Gelegenheit des *zweiten* Beispiels notirten Werthe haben. Somit ergiebt sich:

*) Was den Werth von Q_{01} betrifft, so vergleiche man die Note, Seite 132.

$$(13.)\qquad P_{11}\,Q_{p1} = \frac{p(p+1)}{2p+1}\,(Q_{p-1} - Q_{p+1}).$$

Dies aber ist die recurrente Relation (IV.[b]), Seite 65.

Fünftes Beispiel. Nach der allgemeinen Formel (Tab. D''. 1) ergiebt sich:

$$P_{q+2}\,Q_q - P_q\,Q_{q+2} = \frac{2(2q+3)}{(q+1)(q+2)}\,P_1;$$

somit folgt aus (9.):

$$(14.)\qquad P_{q+2,1}\,Q_{q1} - P_{q1}\,Q_{q+2,1} = \frac{2(2q+3)}{(q+1)(q+2)}\,(q+2,q)_1\,P_1.$$

Nach (8.) ist aber $(q+2, q)_1 = (q+1)(q+2)$. Also:

$$(15.)\qquad P_{q+2,1}\,Q_{q1} - P_{q1}\,Q_{q+2,1} = 2(2q+3)\,P_1;$$

und dies ist die recurrente Relation (g), Seite 72.

Vervollständigung der Tabellen. — Geht man aus von den schon bewiesenen Formeln

(Tab. A. 1, B. 1, A'. 1, B'. 1, C. 1, D. 1, D'. 1, D''. 1),

so gelangt man mit Hülfe des Satzes (9.) sofort zu den Formeln:

(Tab. A. 2, B. 2, A'. 2, B'. 2, C. 2, D. 2, D'. 2, D''. 2);

und sodann von diesen letztern aus durch Betrachtung des speciellen Falles $p = q$ zu den weiteren Formeln:

(Tab. A. 6, B. 6, A'. 6, B'. 6, C. 6).

Bemerkung. — Die letzte der eben genannten Formeln (Tab. C. 6) lautet, falls man sie ausführlich niederschreibt, folgendermassen:

$$(16.)\qquad [Q_{p1}]^2 = \frac{-2}{(2p+1)f(p)}\;\frac{(2p+3)(2p+5)\cdots(4p+3)}{(p+1)(p+2)\cdots(2p+1)} \times$$
$$\times\Big[(p+1)^2 Q_{2p+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)^2\left(\frac{4p+3}{4p+4}\right)\left\{\frac{4p+7}{4p+3}\right\}[(p+3)^2 - 1\cdot 3]\,Q_{2p+3} +$$
$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{(2p+2)(2p+4)}{(2p+3)(2p+5)}\right)^2\left(\frac{(4p+3)(4p+5)}{(4p+4)(4p+6)}\right)\left\{\frac{4p+11}{4p+3}\right\}[(p+5)^2 - 2\cdot 5]\,Q_{2p+5} + \cdots\Big].$$

Setzt man nun die Zahl $p = 0$, und beachtet man, dass $Q_0 = \log(\sigma + 1) - \log(\sigma - 1)$ ist [Note, Seite 132], so erhält man die einfache Formel:

$$(17.)\qquad \frac{1}{1-\sigma^2} = -\frac{1}{2}\Big[3\,Q_1 + 7\,Q_3 + 11\,Q_5 + 15\,Q_7 + \cdots\Big].$$

Diese Formel lässt sich übrigens auch leicht ableiten aus derjenigen Entwicklung, welche ich (im *Crelle*'schen Journal Bd. 37) unter Anwendung der elliptischen Coordinaten für die *reciproke Entfernung zweier Puncte* gegeben habe. Denn jene Entwickelung nimmt, falls man daselbst $\mu = \mu_1 = 1$ setzt, die Gestalt an:

[vorausgesetzt: $\sigma_1 < \sigma$.]

$$\frac{1}{\sigma - \sigma_1} = \frac{1}{2}\Big[P_0(\sigma_1)\,Q_0(\sigma) + 3\,P_1(\sigma_1)\,Q_1(\sigma) + 5\,P_2(\sigma_1)\,Q_2(\sigma) + 7\,P_3(\sigma_1)\,Q_3(\sigma) + \cdot\cdot\Big]; \tag{18.}$$

und hieraus folgt, falls man σ_1 successive $= 1$ und $= -1$ werden lässt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma - 1} &= \frac{1}{2}\Big[Q_0(\sigma) + 3\,Q_1(\sigma) + 5\,Q_2(\sigma) + 7\,Q_3(\sigma) + \cdots\Big], \\ \frac{1}{\sigma + 1} &= \frac{1}{2}\Big[Q_0(\sigma) - 3\,Q_1(\sigma) + 5\,Q_2(\sigma) - 7\,Q_3(\sigma) + \cdots\Big]. \end{aligned} \tag{19.}$$

Aus diesen beiden Formeln entspringt aber die Formel (17.) durch Subtraction.

Zweite Bemerkung. Differenzirt man die Formel (18.) q mal nach σ_1, und setzt sodann $\sigma_1 = 1$, so ergiebt sich:

$$\frac{1\cdot 2\cdots q}{(\sigma-1)^{q+1}} = \frac{1}{2}\Big[(2q+1)\,P_q^{(q)}(1)\,Q_q(\sigma) + (2q+3)\,P_{q+1}^{(q)}(1)\,Q_{q+1}(\sigma) + (2q+5)\,P_{q+2}^{(q)}(1)\,Q_{q+2}(\sigma) + \cdots\Big]. \tag{20.}$$

Nun ist aber: $P_q^{(q)}(1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2q-1)$,

und: $P_{q+j}^{(q)}(1) = [1\cdot 3\cdot 5\cdots(2q-1)]\,\dfrac{(2q+1)(2q+2)\cdots(2q+j)}{1\cdot 2\cdots j}$; [vrgl. Seite 77.]

folglich:

$$\frac{1}{(\sigma-1)^{q+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2q-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots q}\Big[(2q+1)\,Q_q(\sigma) + \frac{2q+1}{1}\,(2q+3)\,Q_{q+1}(\sigma) + \\ + \frac{(2q+1)(2q+2)}{1\cdot 2}\,(2q+5)\,Q_{q+2}(\sigma) + \cdots\Big], \tag{21.}$$

immer vorausgesetzt, dass $\sigma > 1$ sei.

§ 7.

Entwicklung des Productes einer Kugelfunction mit einer abgeleiteten Kugelfunction ersten Grades.

Zufolge der für P_p geltenden Differentialgleichung ist:

$$P_q\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big((1-\sigma^2)\,P_p'\Big) = -p(p+1)\,P_p\,P_q;$$

addirt man hiezu die identische Gleichung:

$$(1-\sigma^2)\,P_p'\,\frac{\partial P_q}{\partial\sigma} = (1-\sigma^2)\,P_p'\,P_q',$$

so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\Big((1-\sigma^2)\,P_p'\,P_q\Big) = (1-\sigma^2)\,P_p'\,P_q' - p(p+1)\,P_p\,P_q,$$

und hieraus durch Integration:

$$(1-\sigma^2)\,P_p'\,P_q = \int^{\sigma}\Big((1-\sigma^2)\,P_p'\,P_q' - p(p+1)\,P_p\,P_q\Big)\,\partial\sigma,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, P_{p1} P_q = \int^{\sigma} \Big(P_{p1} P_{q1} - p(p+1) P_p P_q \Big) \partial\sigma. \tag{1.a}$$

Und in analoger Weise ergiebt sich:

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, P_p P_{q1} = \int^{\sigma} \Big(P_{p1} P_{q1} - q(q+1) P_p P_q \Big) \partial\sigma. \tag{1.b}$$

Diese Gleichungen (1.), (2.) bleiben offenbar gültig, wenn man in ihnen die Functionen P_p, P_{p1} durch Q_p, Q_{p1} ersetzt, ebenso auch dann, wenn man die P_q, P_{q1} durch Q_q, Q_{q1} ersetzt, und ebenso auch dann, wenn man beiderlei Ersetzungen gleichzeitig bewerkstelligt. Versteht man daher unter Y, Z, Z_p, Z_q folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
Y &= \alpha P_p P_q + \beta Q_p Q_q + \gamma Q_p P_q + \delta P_p Q_q, \\
Z &= \alpha P_{p1} P_{q1} + \beta Q_{p1} Q_{q1} + \gamma Q_{p1} P_{q1} + \delta P_{p1} Q_{q1}, \\
Z_p &= \alpha P_{p1} P_q + \beta Q_{p1} Q_q + \gamma Q_{p1} P_q + \delta P_{p1} Q_q, \\
Z_q &= \alpha P_p P_{q1} + \beta Q_p Q_{q1} + \gamma Q_p P_{q1} + \delta P_p Q_{q1},
\end{aligned} \tag{2.}$$

wo α, β, γ, δ beliebige Constanten sein sollen, so wird zufolge (1.^{a}) die Formel stattfinden:

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, Z_p = \int^{\sigma} \Big(Z - p(p+1) Y \Big) \partial\sigma, \tag{3.}$$

und zufolge (1.^{b}) die Formel:

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, Z_q = \int^{\sigma} \Big(Z - q(q+1) Y \Big) \partial\sigma. \tag{4.}$$

In diesen Gleichungen (3.), (4.) *kann man nun für Y und Z die schon* ***bekannten*** *nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwicklungen substituiren, und erhält alsdann entsprechende Entwicklungen für Z_p und Z_q.* — Um näher hierauf einzugehen, mag die Entwicklung von Y, wie sie aus den früheren Betrachtungen (Seite 124—128) resultirt, wirklich effectuirt gedacht werden; sie laute:

$$\begin{aligned}
Y = B_0 P_0 + \cdots\cdots + B_n P_n + \cdots\cdots \\
+ C_0 Q_0 + \cdots\cdots + C_n Q_n + \cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{5.}$$

wo die B, C constante Coefficienten sind, und in jeder Zeile ausser dem *ersten* Gliede nur das *allgemeine* Glied*) hingeschrieben ist. Nach bekanntem Satze (Seite 38) lautet alsdann die Entwickelung von Z:

*) Der Index n dieses allgemeinen Gliedes soll also (weil das erste Glied schon abgesondert ist) nie $= 0$ werden, sondern beschränkt sein auf die Werthe $1, 2, 3, 4, \cdots\cdot$

$$Z = (p,q)_0 B_0 P_0 + \cdots\cdots + (p,q)_n B_n P_n + \cdots \quad \tag{6.}$$
$$+ (p,q)_0 C_0 Q_0 + \cdots\cdots + (p,q)_n C_n Q_n + \cdots\cdots,$$

$$\text{wo:} \quad (p,q)_\lambda = \frac{1}{2}\left[p(p+1) + q(q+1) - \lambda(\lambda+1)\right], \tag{7.}$$

$$\text{mithin:} \quad (p,q)_\lambda - p(p+1) = -\frac{1}{2}\left[\lambda(\lambda+1) + p(p+1) - q(q+1)\right], \tag{8.}$$
$$\text{d. i.:} \quad = -(\lambda, p)_q.$$

Substituirt man nun die Werthe (5.), (6.) in (3.), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (8.):

$$\sqrt{1-\sigma^2}\, Z_p = -(0,p)_q B_0 \int P_0 \partial\sigma - \cdots\cdots - (n,p)_q B_n \int P_n \partial\sigma - \cdots\cdot \tag{9.}$$
$$- (0,p)_q C_0 \int Q_0 \partial\sigma - \cdots\cdots - (n,p)_q C_n \int Q_n \partial\sigma - \cdots\cdot,$$

oder, falls man die Integrale rechter Hand, abgesehen von $\int Q\,\partial\sigma$, wirklich berechnet*), die Integrationsconstante mit K bezeichnet, und schliesslich durch $\sqrt{1-\sigma^2}$ dividirt:

$$Z_p = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,p)_q B_0 \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \cdots\cdot + \frac{(n,p)_q}{n(n+1)} B_n P_{n,1} + \cdots\cdot \tag{10.}$$
$$+ (0,p)_q C_0 \left(\frac{-\int Q_0 \partial\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \cdots\cdot + \frac{(n,p)_q}{n(n+1)} C_n Q_{n,1} + \cdots\cdot$$

Substituirt man andererseits die Werthe (5.), (6.) nicht in (3.), sondern in (4.), so gelangt man zu der analogen Formel:

$$Z_q = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,q)_p B_0 \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \cdots\cdot + \frac{(n,q)_p}{n(n+1)} B_n P_{n,1} + \cdots\cdots \tag{11.}$$
$$+ (0,q)_p C_0 \left(\frac{-\int Q_0 \partial\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \cdots\cdot + \frac{(n,q)_p}{n(n+1)} C_n Q_{n,1} + \cdots\cdot,$$

wo L die Integrationsconstante bezeichnet. — Für die in (2.) genannten Aggregate gilt somit folgende Regel:

(12.) *Liegt die Entwicklung* (5.) *des Aggregates Y in fertiger Gestalt vor, so lassen sich die Entwicklungen der drei andern Aggregate Z, Z_p, Z_q augenblicklich hinschreiben nach Maassgabe der Formeln* (6.), (10.), (11.).

---

*) Aus der für P_n und Q_n geltenden Differentialgleichung folgt:

$$n(n+1)\int P_n \partial\sigma = -(1-\sigma^2) P_n' = -\sqrt{1-\sigma^2}\, P_{n,1},$$
$$n(n+1)\int Q_n \partial\sigma = -(1-\sigma^2) Q_n' = -\sqrt{1-\sigma^2}\, Q_{n,1}.$$

Ferner ist $P_0 = 1$, mithin $\int P_0 \partial\sigma = \sigma$. Auch der Werth von $\int Q_0 \partial\sigma$ würde sich leicht angeben lassen; was aber für unsere Zwecke überflüssig ist.

Während übrigens die Entwicklungen von Y und Z nach den Kugelfunctionen P_n, Q_n fortschreiten, gehen die Entwicklungen von Z_p und Z_q, abgesehen von gewissen störenden Gliedern, fort nach den *abgeleiteten* Kugelfunctionen $P_{n,1}$, $Q_{n,1}$. Was jene störenden Glieder betrifft, so sei bemerkt, dass die den Constanten K, L und B_0 entsprechenden ebenfalls dem allgemeinen Typus der Entwicklung sich subordiniren; denn es ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{Q_{0,1}(\sigma)}{2}, \qquad \text{[vergl. die Note, Seite 132.]} \tag{13.}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \pm\frac{Q_{0,1}(\sigma)}{2} - \left(\frac{P_{n,1}(\sigma)}{n}\right)_{n=0}, \; ^{*)} \tag{14.}$$

wo allerdings das letzte Glied der zweiten Gleichung, wie aus dem zweifelhaften Vorzeichen $\pm$ des vorhergehenden Gliedes ersichtlich ist, an einer gewissen *Unbestimmtheit* leidet; so dass es rathsam erscheint, die Substitution (14.) in unsern Formeln (10.), (11.) *nicht* zu bewerkstelligen. — Was endlich das letzte störende Glied, nämlich das mit C_0 behaftete, betrifft, so wird sich im weitern Verlauf unserer Betrachtungen herausstellen, dass dasselbe stets *verschwindet.*

Die Werthe der noch unbekannten *Integrationsconstanten* K, L bedürfen in jedem gegebenen Fall einer besondern Untersuchung. Vorläufig wissen wir nur, dass sie unabhängig von σ sind, dass sie also lediglich von α β, γ, δ und p, q abhängen können.

*) Die Ableitung der Formel (14.) lässt sich mit Hülfe zweier früherer Entwicklungen [(32.), Seite 21] bewerkstelligen. Differenzirt man nämlich jene Entwicklungen nach x resp. σ, so folgt

aus der ersten: $$\left(\frac{P'_n(\sigma)}{n}\right)_{n=0} = +\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sigma-1}{2} + \left(\frac{\sigma-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma-1}{2}\right)^3 + \cdots\right] = +\frac{1}{1+\sigma},$$

aus der zweiten: $$\left(\frac{P'_n(\sigma)}{n}\right)_{n=0} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sigma+1}{2} + \left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^3 + \cdots\right] = -\frac{1}{1-\sigma};$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit $\sqrt{1-\sigma^2}$:

$$\left(\frac{P_{n,1}(\sigma)}{n}\right)_{n=0} = \begin{cases} +\dfrac{1-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \\ -\dfrac{1+\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}; \end{cases}$$

oder, mit Rücksicht auf (13.):

$$\left(\frac{P_{n,1}(\sigma)}{n}\right)_{n=0} = \pm\frac{Q_{0,1}(\sigma)}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Dies aber ist die Formel (14.), um deren Beweis es sich handelte.

Bei der Entwicklung der Producte PP, QQ, PQ (Seite 123—128) hatten wir vier Fälle unterschieden:

(15.) $P_p P_q$, $(p \geqq q)$; $Q_p Q_q$; $Q_p P_q$, $(p \geqq q)$; $P_p Q_q$, $(p > q)$;

und in analoger Weise wollen wir auch gegenwärtig verfahren, nämlich der Reihe nach in Betracht ziehen

(16.) erstens: $P_{p,1} P_q$, $P_p P_{q,1}$, $(p \geqq q)$; zweitens: $Q_{p,1} Q_q$, $Q_p Q_{q,1}$; drittens: $Q_{p,1} P_q$, $Q_p P_{q,1}$, $(p \geqq q)$; viertens: $P_{p,1} Q_q$, $P_p Q_{q,1}$, $(p > q)$.*)

Auch werden wir, ähnlich wie früher, die in *vierter* Stelle genannten Producte nicht *direct*, sondern ihre *Differenzen* gegenüber den in *dritter* Stelle genannten Producten behandeln.

Erstens: die Producte $P_{p,1} P_q$ und $P_p P_{q,1}$. — Setzt man in (2.): $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta = 0$, so wird $Y = P_p P_q$, ferner $Z_p = P_{p,1} P_q$, und $Z_q = P_p P_{q,1}$; so dass man also mittelst des Satzes (12.) die Entwicklungen der beiden letzten Producte aus der des ersten abzuleiten vermag. Dabei wird es gut sein, zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $p > q$ oder $= q$ ist.

Erster Fall: $p > q$. — Alsdann ist nach (Tab. A'. 1):

$$(17.)\qquad P_p P_q = \mathfrak{K} P_d + \mathfrak{J} P_{d+2} + \mathfrak{H} P_{d+4} \cdots + \mathfrak{A} P_s;$$

und hieraus folgt durch Anwendung des Satzes (12.):

[immer vorausgesetzt: $p > q$.]

$$(18.^a)\qquad P_{p,1} P_q = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(d,p)_q}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1} \cdots + \frac{(s,p)_q}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1},$$

$$(18.^b)\qquad P_p P_{q,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(d,q)_p}{d(d+1)} \mathfrak{K} P_{d,1} \cdots + \frac{(s,q)_p}{s(s+1)} \mathfrak{A} P_{s,1}.$$

Um die Constanten K und L zu bestimmen, multipliciren wir diese Formeln mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzen sodann $\sigma = 1$. Alsdann zeigt sich sofort, dass

$$(18.^c)\qquad K = L = 0 \quad \text{ist.}$$

Zweiter Fall: $p = q$. — Alsdann nimmt die Formel (17.) die speciellere Gestalt an [vergl. auch (Tab. A'. 5)]:

$$(19.)\qquad [P_p]^2 = \mathfrak{k} P_0 + \mathfrak{i} P_2 + \mathfrak{h} P_4 \cdots + \mathfrak{a} P_{2p};$$

woraus durch Anwendung des Satzes (12.) folgt:

*) Der Grund, weshalb man im *vierten* Fall auf die Festsetzung $p > q$ (nicht $= q$) sich beschränken kann, ist auf Seite 128 bei (16.) auseinandergesetzt.

$$P_{p,1}\,P_p = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,p)_p\,\mathfrak{k}\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \frac{(2,p)_p}{2\cdot 3}\,\mathfrak{i}\,P_{2,1} + \frac{(4,p)_p}{4\cdot 5}\,\mathfrak{h}\,P_{4,1} + \cdots,$$

oder, weil $(0,p)_p = 0$ und $(\lambda,p)_p = \frac{1}{2}\,\lambda\,(\lambda+1)$ ist:

$$P_{p,1}\,P_p = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{i}\,P_{2,1} + \mathfrak{h}\,P_{4,1} \cdots + \mathfrak{a}\,P_{2p,1}\right]. \tag{20.a}$$

Multiplicirt man aber diese Gleichung mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzt sodann $\sigma = 1$, so ergiebt sich wieder, dass

$$K = 0 \quad \text{ist.} \tag{20.b}$$

Die resultirenden Formeln (18.[a, b, c]) und (20.[a, b]) sind angegeben*) in (Tab. A'. 3, 4, 7) und in etwas anderer Schreibweise auch in (Tab. A. 3, 4, 7).

Zweitens: die Producte $Q_{p,1}\,Q_q$ **und** $Q_p\,Q_{q,1}$. — Mag nun $p > q$, $= q$ oder $< q$ sein, stets gilt nach (Tab. C. 1) die Formel:

$$Q_p\,Q_q = \mathsf{A}\,Q_{s+1} + \mathsf{B}\,Q_{s+3} + \Gamma\,Q_{s+5} + \cdots \text{ in inf.};\tag{21.}$$

und hieraus folgt mittelst des Satzes (12.), falls man $\beta = 1$, und $\alpha = \gamma = \delta = 0$ setzt:

[einerlei, ob $p > q$, $= q$ oder $< q$ ist.]

$$Q_{p,1}\,Q_q = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(s+1,p)_q}{(s+1)(s+2)}\,\mathsf{A}\,Q_{s+1,1} + \frac{(s+3,p)_q}{(s+3)(s+4)}\,\mathsf{B}\,Q_{s+3,1} + \cdots \text{ in inf.} \tag{22.a}$$

Multiplicirt man diese Formel mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzt sodann $\sigma = \infty$, so verschwinden alle mit A, B, Γ, $\cdots$ behafteten Glieder, und ebenso auch die linke Seite; so dass man erhält:

$$K = 0. \tag{22.b}$$

Die resultirende Formel (22.[a, b]) ist aufgeführt in (Tab. C. 3, 4). Hieraus aber ergiebt sich, indem man $p = q$ macht, sofort die speciellere Formel (Tab. C. 7). Diese letztere kann übrigens auch abgeleitet werden aus der Formel (Tab. C. 5), durch Differentation nach σ.

Drittens: die Producte $Q_{p,1}\,P_q$ **und** $Q_p\,P_{q,1}$. — Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem $p > q$ oder $= q$ ist.

Erster Fall: $p > q$, mithin $d > 0$. — Bringt man auf die Formel (Tab. B'. 1):

$$Q_p\,P_q = \mathfrak{K}\,Q_d + \mathfrak{J}\,Q_{d+2} + \mathfrak{H}\,Q_{d+4} \cdots + \mathfrak{A}\,Q_s \tag{23.}$$

den Satz (12.) in Anwendung, so folgt:

---

*) In der That ist z. B. die Formel (20.[a, b]) identisch mit der Formel (Tab. A'. 7), wie man sofort erkennt, falls man nur beachtet, dass $P_{0,1}$ *verschwindet*. Auch bemerkt man, dass diese Formel (Tab. A'. 7) angesehen werden darf als ein *Specialfall* der Formeln (Tab. A'. 3, 4).

[vorausgesetzt: $p > q$ (nicht $= q$).]

$$Q_{p,1} P_q = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(d,p)_q}{d(d+1)} \mathfrak{K} Q_{d,1} \cdots + \frac{(s,p)_q}{s(s+1)} \mathfrak{A} Q_{s,1}, \tag{24.a}$$

$$Q_p P_{q,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(d,q)_p}{d(d+1)} \mathfrak{K} Q_{d,1} \cdots + \frac{(s,q)_p}{s(s+1)} \mathfrak{A} Q_{s,1}; \tag{24.b}$$

multiplicirt man aber diese beiden Formeln mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzt sodann $\sigma = \infty$, so ergiebt sich sofort:

$$K = L = 0. \tag{24.c}$$

Zweiter Fall: $p = q$, mithin $d = 0$. In diesem Fall nimmt die Formel (23.) folgende speciellere Gestalt an [vergl. (Tab. B'. 5)]:

$$Q_p P_p = \mathfrak{k} Q_0 + \mathfrak{i} Q_2 + \mathfrak{h} Q_4 \cdots + \mathfrak{a} Q_{2p}, \tag{25.}$$

wo z. B. der erste Coefficient $\mathfrak{k}$ den Werth hat:

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{2p+1}. \tag{26.}$$

Aus (25.) ergiebt sich nun mittelst des Satzes (12.):

$$Q_{p,1} P_p = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,p)_p \mathfrak{k} \left(\frac{-\int Q_0 \partial \sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \frac{(2,p)_p}{2 \cdot 3} \mathfrak{i} Q_{2,1} + \cdots,$$

$$Q_p P_{p,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,p)_p \mathfrak{k} \left(\frac{-\int Q_0 \partial \sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) + \frac{(2,p)_p}{2 \cdot 3} \mathfrak{i} Q_{2,1} + \cdots,$$

oder, weil $(0,p)_p = 0$ und $(\lambda, p)_p = \frac{1}{2} \lambda (\lambda + 1)$ ist:

[immer vorausgesetzt: $p > q$.]

$$Q_{p,1} P_p = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{1}{2} \left[\mathfrak{i} Q_{2,1} + \mathfrak{h} Q_{4,1} \cdots + \mathfrak{a} Q_{2p,1}\right], \tag{27.a}$$

$$Q_p P_{p,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{1}{2} \left[\mathfrak{i} Q_{2,1} + \mathfrak{h} Q_{4,1} \cdots + \mathfrak{a} Q_{2p,1}\right]. \tag{27.b}$$

Um die Werthe der noch unbekannten Constanten K, L zu ermitteln, multipliciren wir diese Formeln mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzen sodann $\sigma = \infty$. In solcher Weise ergiebt sich:

$$\left[(1-\sigma^2) Q'_p P_p\right]_{\sigma=\infty} = K,$$

$$\left[(1-\sigma^2) Q_p P'_p\right]_{\sigma=\infty} = L;$$

folglich [mit Benutzung der Formeln, Seite 119, (68.), (69.)]:

$$K = + \frac{2p+2}{2p+1}, \qquad L = - \frac{2p}{2p+1},$$

oder, mit Rücksicht auf (26.):

$$K = \mathfrak{k} + 1, \qquad L = \mathfrak{k} - 1. \tag{27.c}$$

Substituirt man aber diese Werthe in (27.[a, b]), und beachtet man gleichzeitig, dass $\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \frac{1}{2} Q_{0,1}$ ist, so erhält man schliesslich:

[immer vorausgesetzt: $p > q$.] ·

$$Q_{p,1} P_p = + \frac{1}{2} \; Q_{0,1} + \frac{1}{2} \left[\mathfrak{t}\, Q_{0,1} + \mathfrak{i}\, Q_{2,1} \cdots\cdot + \mathfrak{a}\, Q_{2p,1} \right], \tag{28.a}$$

$$Q_p P_{p,1} = - \frac{1}{2} \; Q_{0,1} + \frac{1}{2} \left[\mathfrak{t}\, Q_{0,1} + \mathfrak{i}\, Q_{2,1} \cdots + \mathfrak{a}\, Q_{2p,1} \right], \tag{28.b}$$

Die resultirenden Formeln (24.[a, b, c]) und (28.[a, b]) findet man verzeichnet in (Tab. B′. 3, 4 und 7, 8), und in etwas anderer Schreibweis auch in (Tab. B. 3, 4 und 7, 8).

Viertens: die Producte $P_{p,1} Q_q$ und $P_p Q_{q,1}$. — Es mögen hier zwei Fälle unterschieden werden, jenachdem $p-q$ ungerade oder gerade ist. Stets aber mag angenommen werden, dass $p > q$ sei.

Erster Fall: $p-q$ ungerade. — Alsdann findet nach (Tab. D′. 1) die Formel statt:

$$P_p Q_q - Q_p P_q = \mathfrak{T} P_0 + \mathfrak{S} P_2 + \mathfrak{N} P_4 \cdots\cdot + \mathfrak{L} P_{d-1}, \tag{29.}$$

wo z. B. der erste Coefficient $\mathfrak{T}$ den Werth hat:

$$\mathfrak{T} = \frac{4}{d(s+1)}. \qquad \text{Folglich ist: } (0,p)_q \mathfrak{T} = 2, \qquad \text{und:} \qquad (0,q)_p \mathfrak{T} = -2. \tag{30.}$$

Aus (29.) ergeben sich nun mittelst des Satzes (12.) die beiden Formeln:

[immer vorausgesetzt: $p-q$ *ungerade*, und >0.]

$$P_{p,1} Q_q - Q_{p,1} P_q = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,p)_q \mathfrak{T} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) + \\ + \frac{(2,p)_q}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_{2,1} + \frac{(4,p)_q}{4 \cdot 5} \mathfrak{N} P_{4,1} \cdots + \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1}, \tag{31.a}$$

$$P_p Q_{q,1} - Q_p P_{q,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + (0,q)_p \mathfrak{T} \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \right) + \\ + \frac{(2,q)_p}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_{2,1} + \frac{(4,q)_p}{4 \cdot 5} \mathfrak{N} P_{4,1} \cdots\cdot + \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1,1}. \tag{31.b}$$

Um die noch unbekannten Constanten K, L zu ermitteln, multipliciren wir diese Gleichungen mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzen sodann $\sigma = 1$. Alsdann ergiebt sich*):

---

*) Zu beachten ist dabei die Formel:

$$\Big((1-\sigma^2) \left(P_p Q_q' - Q_p P_q' \right) \Big)_{\sigma=1} = \Big((1-\sigma^2) \left(P_q Q_p' - Q_q P_p' \right) \Big)_{\sigma=1} = 2,$$

zu welcher man leicht gelangt, sobald man für Q_p und Q_q ihre logarithmischen Ausdrücke [Seite 1 (3.), (4.)] substituirt.

$$-2 = K - (0,p)_q \mathfrak{T},$$

$$+2 = L - (0,q)_p \mathfrak{T},$$

also mit Rücksicht auf (30.):

(31.c) $$K = L = 0.$$

Zweiter Fall: $p - q$ gerade. Alsdann gilt nach (Tab. D''. 1) folgende Formel:

(32.) $$P_p Q_q - Q_p P_q = \mathfrak{W} P_1 + \mathfrak{V} P_3 + \mathfrak{U} P_5 \cdots + \mathfrak{L} P_{d-1},$$

und hieraus folgt mittelst des Satzes (12.):

[vorausgesetzt: $p - q$ *gerade*, und > 0.]

(33.a) $$P_{p,1} Q_q - Q_{p,1} P_q = \frac{K}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(1,p)_q}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_{1,1} + \frac{(3,p)_q}{3 \cdot 4} \mathfrak{V} P_{3,1} + \cdots,$$

(33.b) $$P_p Q_{q,1} - Q_p P_{q,1} = \frac{L}{\sqrt{1-\sigma^2}} + \frac{(1,q)_p}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_{1,1} + \frac{(3,q)_p}{3 \cdot 4} \mathfrak{V} P_{3,1} + \cdots.$$

Multiplicirt man aber diese Formeln mit $\sqrt{1-\sigma^2}$, und setzt sodann $\sigma = 1$, so ergiebt sich*):

(33.c) $$K = -2, \qquad \text{hingegen:} \quad L = +2.$$

Die resultirenden Formeln (31.a, b, c) und (33.a, b, c) findet man angegeben in (Tab. D'. 3, 4) und in (Tab. D''. 3, 4); und in etwas anderer Schreibweise findet man dieselben Formeln auch in (Tab. D. 3, 4) angegeben **).

§ 8.

Ueber gewisse zwischen den Kugelfunctionen stattfindende Relationen, die mittelst begrenzter Integrale sich ausdrücken.

Aus der die Kugelfunctionen zweiter Art definirenden Formel:

(1.) $$Q_n(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,\partial z}{\sigma - z}$$

folgt, wie schon früher (Seite 64) gezeigt wurde:

(2.) $$Q'_n(\sigma) = \varphi_n + \int_{-1}^{+1} \frac{P'_n(z)\,\partial z}{\sigma - z}, \qquad \text{wo} \quad \varphi_n = \begin{cases} \dfrac{2\sigma}{1-\sigma^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \dfrac{2}{1-\sigma^2}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aus dieser letzten Formel ergiebt sich z. B.:

*) Vergl. die vorhergehende Note.

**) Gleichzeitig sind diese Formeln in jenen Tabellen noch ein wenig vereinfacht durch Substitution der in (30.) angegebenen Werthe.

$$(3.)\qquad Q_0'(\sigma) = \frac{2}{1-\sigma^2}, \quad \text{und} \quad Q_1'(\sigma) = Q_0(\sigma) + \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}.$$

Ersetzt man das Integral (1.) durch den bekannten logarithmischen Ausdruck:

$$(4.)\qquad Q_n(\sigma) = R_n(\sigma) - P_n(\sigma)\cdot \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1},$$

so ergeben sich leicht die beiden Relationen:

$$(5.^a)\qquad \left[(1-\sigma^2)\,Q_n(\sigma)\right]_{\sigma=1} = 0,$$

$$(5.^b)\qquad \left[(1-\sigma^2)\,Q_n'(\sigma)\right]_{\sigma=1} = 2.$$

Solches vorangeschickt, wenden wir uns zu unserm eigentlichen Thema, nämlich zur Betrachtung einer gewissen Gattung Integrale, die sämmtlich von der Form sind:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)\,\partial z}{\sigma - z},$$

und in denen die Function $F(z)$ entweder durch das Product $P_p(z)\,P_q(z)$ oder durch $(1-z^2)\,P_p'(z)\,P_q'(z)$, oder durch $P_p(z)\,P_q'(z)$ vertreten sein soll. Im letztern Fall wird die anzustellende Untersuchung verschieden sein, jenachdem $p > q$ oder $< q$ oder $= q$ ist; so dass im Ganzen *fünf* Integrale in Betracht kommen.

Erstes Integral. — Nach (Tab. A. 1) und (Tab. B. 1) ist

$$(6.)\qquad P_p(\sigma)\,P_q(\sigma) = \mathfrak{A}\,P_s(\sigma) + \mathfrak{B}\,P_{s-2}(\sigma)\cdots + \mathfrak{K}\,P_d(\sigma),$$

$$(7.)\qquad Q_p(\sigma)\,P_q(\sigma) = \mathfrak{A}\,Q_s(\sigma) + \mathfrak{B}\,Q_{s-2}(\sigma)\cdots + \mathfrak{K}\,Q_d(\sigma). \qquad [\text{falls } p \geqq q.]$$

Aus (7.) folgt durch Anwendung der Formel (1.) sofort:

$$Q_p(\sigma)\,P_q(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{[\mathfrak{A}\,P_s(z) + \mathfrak{B}\,P_{s-2}(z)\cdots + \mathfrak{K}\,P_d(z)]\,\partial z}{\sigma - z};$$

d. i. nach (6.):

$$Q_p(\sigma)\,P_q(\sigma) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)\,P_q(z)\,\partial z}{\sigma - z}.$$

Somit gelangt man unter Rücksichtnahme auf (Tab. D. 1) zu folgendem Resultat:

[vorausgesetzt: $p \geqq q$.]

$$(8.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)\,P_q(z)\,\partial z}{\sigma - z} = Q_p(\sigma)\,P_q(\sigma),$$

$$(8.^a)\qquad = P_p(\sigma)\,Q_q(\sigma) - G(\sigma),$$

wo G die *ganze rationale* Function repräsentirt:

$$(8.^b)\qquad G = \mathfrak{L}\,P_{d-1} + \mathfrak{M}\,P_{d-3}\cdots + \mathfrak{T}\,P_0 \quad [\text{resp. } \mathfrak{W}\,P_1].$$

Bemerkung. — Bringt man die Formel (8.) auf $q = 0, 1, 2, \cdots p$ in Anwendung, und combinirt man mit einander die so entstehenden Gleichungen, welche der Reihe nach mit

$$P_0(z),\ P_0(\sigma); \qquad P_1(z),\ P_1(\sigma); \qquad \cdots\cdots \qquad P_p(z),\ P_p(\sigma)$$

behaftet sein werden, so ergiebt sich:

$$(\alpha.) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z) \cdot z^q \cdot \partial z}{\sigma - z} = Q_p(\sigma) \cdot \sigma^q. \qquad [\text{vorausgesetzt: } p > q.]$$

Die Richtigkeit dieser letztern Formel kann man leicht dadurch controliren, dass man den unter dem Integralzeichen in $P_p(z)$ multiplicirten Ausdruck nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$\frac{z^q}{\sigma - z} = \frac{[\sigma - (\sigma - z)]^q}{\sigma - z} = \frac{\sigma^q}{\sigma - z} - \frac{q\,\sigma^{q-1}}{1} + \frac{q(q-1)\,\sigma^{q-2}}{1 \cdot 2}(\sigma - z) + \cdots\cdot$$

Unterwirft man nämlich die einzelnen Glieder dieser Entwicklung der auszuführenden Integration, so verschwinden sämmtliche Glieder mit Ausnahme des ersten [vergl. den Satz in der ersten Note, Seite 33]; und das erste Glied giebt σ^q, multiplicirt mit dem die Function $Q_p(\sigma)$ definirenden Integral.

Zweite Bemerkung. — Ist $\sigma^2 < 1$, so besitzt $Q_p(\sigma)$ einen complexen Werth:

$$Q_p(\sigma) = U_p(\sigma) - P_p(\sigma) \cdot \lg(-1). \qquad [\text{vgl. Seite 131 (8.)}]$$

Substituirt man diesen Werth in (8.), und sondert sodann das Reelle vom Imaginären, so erhält man:

$$(\beta.) \qquad \text{Rth.}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)\, P_q(z)\, \partial z}{\sigma - z}\right\} = U_p(\sigma)\, P_q(\sigma),$$

$$(\gamma.) \qquad \text{Ith}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)\, P_q(z)\, \partial z}{\sigma - z}\right\} = [-\log(-1)]\, P_p(\sigma)\, P_q(\sigma). \qquad [\text{für } p > q.]$$

Zweites Integral. — Die hier und weiterhin anzustellenden Untersuchungen sind der eben absolvirten Betrachtung vollkommen analog; und wir werden daher, unbeschadet der Deutlichkeit, die Argumente σ und z meistentheils unterdrücken können. Nach (Tab. A. 2) und (Tab. B. 2) ist:

$$(9.) \qquad P_{p,1}\, P_{q,1} = \alpha\, P_s + \beta\, P_{s-2} \cdots + \varkappa\, P_d,$$

$$(10.) \qquad Q_{p,1}\, P_{q,1} = \alpha\, Q_s + \beta\, Q_{s-2} \cdots + \varkappa\, Q_d. \qquad [\text{falls } p > q.]$$

Aus (10.) folgt durch Anwendung der Formel (1.):

$$Q_{p,1}\,P_{q,1} = \int_{-1}^{+1} \frac{[\alpha P_s + \beta P_{s-2} \cdots + \varkappa P_d]\,\partial z}{\sigma - z},$$

d. i. nach (9.):

$$Q_{p,1}\,P_{q,1} = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{p,1}\,P_{q,1}\,\partial z}{\sigma - z}.$$

Somit gelangt man unter Rücksichtnahme auf (Tab. D. 2) zu folgendem Resultat:

[vorausgesetzt: $p > q$.]

$$(11.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_{p,1}(z)\,P_{q,1}(z)\,\partial z}{\sigma - z} = Q_{p,1}(\sigma)\,P_{q,1}(\sigma) = P_{p,1}(\sigma)\,Q_{q,1}(\sigma) - G(\sigma)$$

wo G die Bedeutung hat:

$$(11.^a)\qquad G = (p,q)_{d-1}\,\mathfrak{L}\,P_{d-1} + (p,q)_{d-3}\,\mathfrak{M}\,P_{d-3} \cdots + (p,q)_0\,\mathfrak{T}\,P_0 \quad [\text{resp. } (p,q)_1\,\mathfrak{W}\,P_1].$$

Bemerkung. — Bildet man die Formel (11.), welche auch *so* geschrieben werden kann:

$$(\delta.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)\,P_p'(z)\,P_q'(z)\,\partial z}{\sigma - z} = (1-\sigma^2)\,Q_p'(\sigma)\,P_q'(\sigma) \qquad [p \geqq q.]$$

der Reihe nach für $q = 0, 1, 2, \cdots p$, so ergiebt sich durch Combination der in solcher Weise entstehenden Gleichungen:

$$(\varepsilon.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)\,P_p'(z)\cdot z^q\cdot \partial z}{\sigma - z} = (1-\sigma^2)\,Q_p'(\sigma)\cdot\sigma^q, \qquad [\text{falls } p > q \text{ (nicht} = q).]$$

Drittes Integral. — Nach (Tab. A. 3) und (Tab. B. 3) finden die Gleichungen statt:

$$(12.)\qquad P_p'\,P_q = \alpha P_s' + \beta P_{s-2}' \cdots + \varkappa P_d', \qquad [\text{falls } p \geqq q]$$

$$(13.)\qquad Q_p'\,P_q = \alpha Q_s' + \beta Q_{s-2}' \cdots + \varkappa Q_d', \qquad [\text{falls } p > q \text{ (nicht} = q)]$$

beide behaftet mit *denselben* Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots \varkappa$. Aus (13.) folgt durch Multiplication mit $(1 - \sigma^2)$:

$$[(1-\sigma^2)\,Q_p'\,P_q]_{\sigma=1} = \alpha\,[(1-\sigma^2)\,Q_s']_{\sigma=1} + \beta\,[(1-\sigma^2)\,Q_{s-2}']_{\sigma=1} + \cdots,$$

d. i. nach (5.b):

$$(14.)\qquad 2 = 2\,(\alpha + \beta \cdots + \varkappa).$$

Nun folgt ferner aus (13.) durch Anwendung der Formel (2.)

$$Q_p'\,P_q = \left[\alpha\,\varphi_s + \beta\,\varphi_{s-2} \cdots + \varkappa\,\varphi_d\right] + \int_{-1}^{+1} \frac{[\alpha P_s' + \beta P_{s-2}' \cdots + \varkappa P_d']\,\partial z}{\sigma - z}.$$

Nach (2.) ist aber $\varphi_s = \varphi_{s-2} = \cdots \varphi_d$. Somit folgt unter Rücksichtnahme auf (14.) und (12.):

$$Q_p' P_q = \varphi_s + \int_{-1}^{+1} \frac{P_p' P_q \partial z}{\sigma - z},$$

oder, falls man für φ_s seine eigentliche Bedeutung (2.) substituirt:

$$(15.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p' P_q \partial z}{\sigma - z} = Q_p' P_q - \begin{cases} \dfrac{2\sigma}{1-\sigma^2}, & \text{falls } s, \text{ mithin auch } d \text{ ungerade.} \\ \dfrac{2}{1-\sigma^2}, & \text{falls } s \text{ und } d \text{ gerade sind.} \end{cases}$$

In dieser Formel kann man rechter Hand statt des Productes $Q_p' P_q$ das Product $P_p' Q_q$ eintreten lassen. Nach (Tab. D. 3) ist nämlich $Q_p' P_q =$

$$= P_p' Q_q - \left[\frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' \cdots\cdots + \frac{(2,p)_q}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_2' - \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}\right], \quad \text{falls } d \text{ unger.}$$

$$\text{resp.} = P_p' Q_q - \left[\frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' \cdots\cdots + \frac{(1,p)_q}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_1' - \frac{2}{1-\sigma^2}\right], \quad \text{falls } d \text{ ger.}$$

Durch Substitution dieses Werthes in (15.) gelangt man zu folgendem Resultat:

[vorausgesetzt: $p > q$ (nicht $= q$).]

$$(16.)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p'(z) P_q(z) \partial z}{\sigma - z} = Q_p'(\sigma) P_q(\sigma) - F(\sigma) = P_p'(\sigma) Q_q(\sigma) - G(\sigma),$$

wo F und G, falls d *ungerade* ist, die Functionen bezeichnen:

$$(16.^a)\qquad F = \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}, \quad G = \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' + \frac{(d-3,p)_q}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3}' \cdots + \frac{(2,p)_q}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_2',$$

wenn d hingegen *gerade*, folgende:

$$(16.^b)\qquad F = \frac{2}{1-\sigma^2}, \quad G = \frac{(d-1,p)_q}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' + \frac{(d-3,p)_q}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3}' \cdots + \frac{(1,p)_q}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_1'.$$

Viertes Integral. — Nach (Tab. A. 4) und (Tab. B. 4) gelten die Formeln:

$$(17.)\qquad P_p P_q' = \alpha P_s' + \beta P_{s-2}' \cdots + \varkappa P_d', \quad [\text{falls } p \geqq q]$$

$$(18.)\qquad Q_p P_q' = \alpha Q_s' + \beta Q_{s-2}' \cdots + \varkappa Q_d'. \quad [\text{falls } p > q \text{ (nicht } = q)].$$

Aus (18.) folgt durch Multiplication mit $(1 - \sigma^2)$:

$$[(1-\sigma^2) Q_p P_q']_{\sigma=1} = \alpha [(1-\sigma^2) Q_s']_{\sigma=1} + \beta [(1-\sigma^2) Q_{s-2}']_{\sigma=1} + \cdots,$$

also mit Rücksicht auf (5.[a, b]):

$$(18.^a) \qquad 0 = 2(\alpha + \beta \cdots + \varkappa).$$

Ferner folgt aus (18.) durch Benutzung der Formel (2.):

$$Q_p P_q' = \left[\alpha \varphi_s + \beta \varphi_{s-2} \cdots + \varkappa \varphi_d\right] + \int_{-1}^{+1} \frac{[\alpha P_s' + \beta P_{s-2}' \cdots + \varkappa P_d'] \partial z}{\sigma - z};$$

wo, zufolge (2.) die Grössen $\varphi_s, \varphi_{s-2}, \cdots \varphi_d$ alle von *einerlei* Werth sind. Demgemäss ergiebt sich unter Rücksichtnahme auf (18.[a]) und (17.):

$$(19.) \qquad Q_p P_q' = \int_{-1}^{+1} \frac{P_p P_q' \partial z}{\sigma - z}.$$

Das hier auf der linken Seite befindliche Product kann ersetzt werden durch $P_p Q_q'$. Denn nach (Tab. D. 4) ist jenes Product $Q_p P_q' =$

$$= P_p Q_q' - \left[\frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' \cdots + \frac{(2,q)_p}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_2' + \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}\right], \quad \text{falls } d \text{ unger.}$$

$$\text{resp.} = P_p Q_q' - \left[\frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' \cdots + \frac{(1,q)_p}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_1' + \frac{2}{1-\sigma^2}\right], \quad \text{falls } d \text{ ger.}$$

Durch Substitution dieses Werthes in (19.) ergiebt sich folgendes Resultat:

[vorausgesetzt: $p > q$ (nicht $= q$).]

$$(20.) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z) P_q'(z) \partial z}{\sigma - z} = Q_p(\sigma) P_q'(\sigma) = P_p(\sigma) Q_q'(\sigma) - G(\sigma),$$

wo die Function G bei *ungeradem* d den Werth hat:

$$(20.^a) \qquad G = \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' + \frac{(d-3,q)_p}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3}' \cdots + \frac{(2,q)_p}{2 \cdot 3} \mathfrak{S} P_2' + \frac{2\sigma}{1-\sigma^2},$$

bei *geradem* d hingegen folgenden:

$$(20.^b) \qquad G = \frac{(d-1,q)_p}{(d-1)d} \mathfrak{L} P_{d-1}' + \frac{(d-3,q)_p}{(d-3)(d-2)} \mathfrak{M} P_{d-3}' \cdots + \frac{(1,q)_p}{1 \cdot 2} \mathfrak{W} P_1' + \frac{2}{1-\sigma^2}.$$

Fünftes Integral. — Nach (Tab. A. 7) und (Tab. B. 7) hat man die Formeln*):

$$(21.) \qquad P_p' P_p = \alpha P_{2p}' + \beta P_{2p-2}' \cdots + \varkappa P_0',$$

$$(22.) \qquad Q_p' P_p - \frac{1}{2} Q_0' = \alpha Q_{2p}' + \beta Q_{2p-2}' \cdots + \varkappa Q_0'.$$

---

*) Statt der Formel (Tab. B. 7) könnte man ebenso gut auch die Formel (Tab. B. 8) anwenden. In der That würde man alsdann — auf ganz analogem Wege — zu demselben Endresultat, nämlich ebenfalls zur Formel (25.) gelangen.

Aus (22.) folgt durch Multiplication mit $(1-\sigma^2)$:

$$\left[(1-\sigma^2)\,Q_p'\,P_p\right]_{\sigma=1}-\frac{1}{2}\left[(1-\sigma^2)\,Q_0'\right]_{\sigma=1}=\alpha\left[(1-\sigma^2)\,Q_{2p}'\right]_{\sigma=1}+\cdots,$$

also mit Rücksicht auf (5.$^{a,\,b}$):

$$2-1=2\,(\alpha+\beta\cdots+\varkappa),$$

d. i.:

$$\alpha+\beta\cdots+\varkappa=\frac{1}{2}. \tag{23.}$$

Ferner folgt aus (22.) mittelst der Formel (2.):

$$Q_p'\,P_p-\frac{1}{2}\,Q_0'=\left[\alpha\,\varphi_{2p}+\beta\,\varphi_{2p-2}+\cdots\right]+\int_{-1}^{+1}\frac{[\alpha\,P_{2p}'+\beta\,P_{2p-2}'\cdots+\varkappa\,P_0']\,\partial z}{\sigma-z},$$

wo, nach (2.), $\varphi_{2p}=\varphi_{2p-2}=\cdots=\varphi_0$ ist. Somit folgt unter Rücksichtnahme auf (23.) und (21.):

$$Q_p'\,P_p-\frac{1}{2}\,Q_0'=\frac{1}{2}\,\varphi_0+\int_{-1}^{+1}\frac{P_p'\,P_p\,\partial z}{\sigma-z},$$

oder, weil, nach (2.) und (3.), $Q_0'=\varphi_0=\frac{2}{1-\sigma^2}$ ist:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_p'\,P_p\,\partial z}{\sigma-z}=Q_p'\,P_p-\frac{2}{1-\sigma^2}. \tag{24.}$$

Beachtet man schliesslich die recurrente Formel (c.), Seite 71:

$$Q_p'\,P_p=Q_p\,P_p'+\frac{2}{1-\sigma^2},$$

so gelangt man zu folgendem Resultat:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_p(z)\,P_p'(z)\,\partial z}{\sigma-z}=Q_p(\sigma)\,P_p'(\sigma)=Q_p'(\sigma)\,P_p(\sigma)-\frac{2}{1-\sigma^2}, \tag{25.}$$

eine Formel, die, wie man leicht übersieht, den früheren Formeln (16.) und (20.) als Specialfall subordinirt werden kann.

Bemerkung. Durch Zusammenfassung von (20.) und (25.) ergiebt sich:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_p(z)\,P_q'(z)\,\partial z}{\sigma-z}=Q_p(\sigma)\,P_q'(\sigma). \qquad [\text{für } p>q \text{ oder } =q.] \tag{ξ.}$$

Setzt man in dieser Formel der Reihe nach $q = 0, 1, 2, \cdots p$, so ergiebt sich durch Combination der so entstehenden Gleichungen:

$$(\eta.) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z) \cdot z^q \cdot \partial z}{\sigma - z} = Q_p(\sigma) \cdot \sigma^q, \qquad [\text{für } p > q.]$$

Doch gilt diese Formel (η.), wie aus Seite 151 (α.) ersichtlich, nicht nur für $p > q$, sondern auch noch für $p = q$.

§ 9.

Rückblick auf die acht Tabellen Seite 86—93.

Man findet die Ableitung der in diesen acht Tabellen A, B, A′, B′, C, D, D′, D″ mit

(1.) und (5.)

bezeichneten Formeln auf Seite 124—131; ferner die Ableitung der daselbst mit

(2.) und (6.)

bezeichneten Formeln auf Seite 140; endlich die Ableitung der mit

(3.), (4.) und (7.), (8.)

bezeichneten auf Seite 146—149.

